13.10.14г. | **Увод във функционалния анализ - лекции**

(Л-ма на Цорн,) ако имаме частично мн-во с част. наредба

θ - 0-та в лин. пр-во

X над F поле $\begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$

лин. пространство:

имаме събиране и умножение

едно поле от в-ри до е лин

→ $A \subset X$ ще нар. лин. независимо, ако $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset A$:

$\{x_1, \dots, x_k\}$ лин. незав.

• max по отношение на включването

размерност

1) $\dim X = n$ $\qquad \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, п-мите от степен не повече от n

2) $\dim X = \infty$

Примери: c_{00} = редиците пр-ва; р-ци реални числа $= \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : x_i \in F$ и от supp x е краен$\}$

$c_0 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : x_i \in F,\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\}$

$c = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : x_i \in F$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сход.$\}$

$\ell_\infty = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : x_i \in F$ и $\{x_n\}_1^{\infty}$ огр.$\}$

$c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$
supp $x = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$
$y = (y_1, y_2, \dots)$
$x + y = (x_1 + y_1, \dots)$
λx

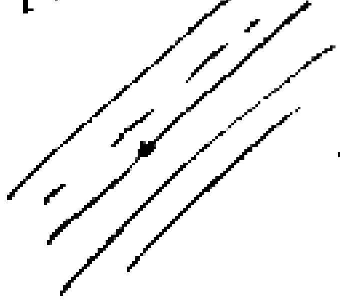
$Y \subset X$ лин. пр.
лин. подпр.

X / Y

→ Ще к., че x е екв. на y $(x \sim y) \iff x - y \in Y$

$x \sim x$
$x \sim y \iff y \sim x$
$x \sim y$ и $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$[x] = \{z \in X : x \sim z\} = x + Y$



Успоредни

$[x] + [y] = [x+y]$, λ - число

$\lambda[x] := [\lambda x]$

$\operatorname{codim} Y := \dim(X/Y)$

коразмерност на

$\operatorname{codim} C_0 = 1$, ако вземем което и да е редица от C
$(C_0 \subset C)$

$x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in C$

$\lim_{n \to \infty} x_n = \lambda$

$\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ - сходяща

$[x] = \lambda \cdot \mathbf{1} + C_0$

факторизиране по редиците, които клонят към 0

X - мн-во

метриката поражда топология

Тогава $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$

d - метрика в X, ако:

$$\begin{cases} d(x,y) = d(y,x) \\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \\ d(x,y) = 0 \iff x = y \end{cases}$$

$\forall x, y, z \in X$

$B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$

$r > 0$ отворено кълбо с център x и радиус r

$\overline{B_r}(x) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$

τ топология в X, ако $\tau \subset 2^X$ и

породена от нея

1) $\emptyset, X \in \tau$

2) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau \Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$

3) $U_1, U_2 \in \tau \to U_1 \cap U_2 \in \tau$

$\tau_d = \{U \subset X : \forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U\}$

заедно с всяка т. съдържа и кълбо около нея

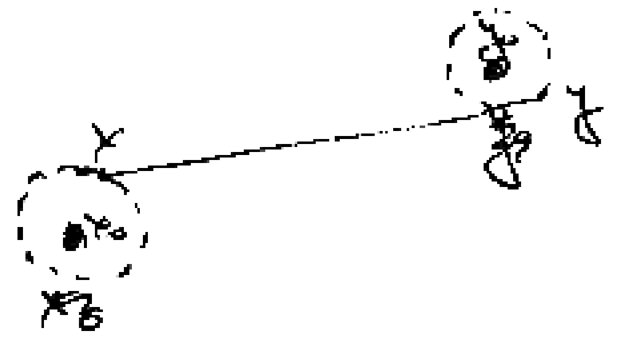
$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, ако $d(x_n,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ затворена обвивка, вътрешност, контур

- отворените кълба са отв. мн-ва

(нер. на Δ ни осигурява, че отв. кълба са отв. мн-ва)

- d е непрекъсната спрямо τ_d



$|d(x,y)-d(x_0,y_0)| \le$ → два пъти нер. на Δ

$$\begin{cases} d(x,y) \le d(x,x_0) + d(x_0,y_0) + d(y_0,y) \\ d(x_0,y_0) \le d(x_0,x) + d(x,y) + d(y,y_0) \end{cases}$$

$\le d(x,x_0) + d(y,y_0)$

X - лин. пр-во

Нека имаме ф-ция, деф. в X

$\|\cdot\| : X \to [0,+\infty)$

Тогава $\|\cdot\|$ се нар. норма, ако:

1) $\|x\| = 0 \iff x = \theta$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ $\forall x,y \in X$, $\forall \lambda \in F$

Ако в лин. пр-во имаме норма, то тогава имаме норм. пр-во, имаме норма

→ X вече е нормирано пр-во

$c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ → безкрайномерни лин. пр-ва

$e_n = (0,0,\dots,\underset{n\text{-то място}}{1},0,\dots)$ -н. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_{00}$

Ако $x \in \ell_\infty$

$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : i = 1,2,\dots\}$

равномерна норма

$C[a,b] = \{f : [a,b] \to F : f \text{ непрекъсната}\}$

$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$

$(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$

$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$

$\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

$\ell_\infty^n, \ell_p^n \mid$

$\ell_p = \{x = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$ — Не е очевидно, че сумата на ел-ти от ℓ_p също е в ℓ_p

$p \in [1, +\infty)$

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$

$x = (x_1, x_2, \dots)$

$y = (y_1, y_2, \dots)$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \underset{\text{Минковски}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p\right)^{1/p} \quad \forall m \geq n$$

$$\xrightarrow{m \to \infty} \|x\|_p + \|y\|_p$$

$x \in \ell_p$

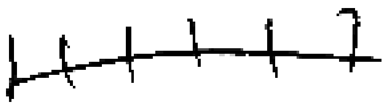
$y \in \ell_p$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)^p \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \ell_p$$

и $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p}$; то дали е норма? (има нужда да док. н. 1

$n \in \mathbb{N}$ $[a,b]$ $\quad x_i = a + \frac{i}{n\cancel{(b-a)}}(b-a)$, $i = \overline{1,n}$



$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Сега от н. Минковски

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)+g(x_i)|^p \Delta x\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|^p \Delta x\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)|^p \Delta x\right)^{1/p}$$

сума на Риман за f и g и знаем, че е интегруема

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}$$

$(X, \|\cdot\|)$ нормирано пр-во

$Y \subset X$

затворено линейно подпр.

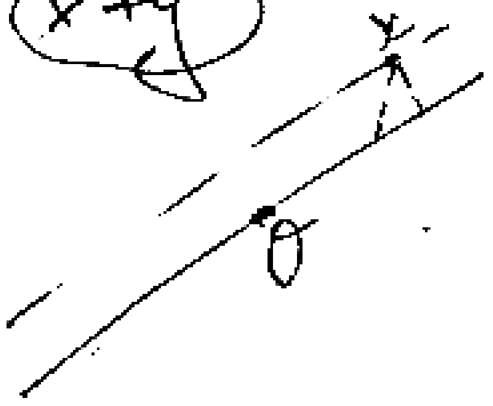
X/Y $\quad (X/Y, |||\cdot|||)$ - става норм. пр-во

фактор пр-во

$|||[x]||| := \inf\{\|x-y\| : y \in Y\}$

норма във фактор пр-вото

$x+y$



$|||[x]||| = 0$

$\Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y, \ \|x-y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow x \in \overline{Y} = Y \Rightarrow x \in Y \Rightarrow [x] = [\theta]$

затв.

$|||[\lambda x]||| = |\lambda| \cdot |||[x]|||$

Трябва ни оценка отгоре

$\varepsilon > 0$ произволно $\to z_1 \in Y, \ |||[x]||| \ge \|x - z_1\| - \varepsilon$

$|||[x]+[y]||| = |||[x+y]||| \le \begin{cases} z_2 \in Y, \ |||[y]||| \ge \|y - z_2\| - \varepsilon \\ z_1 + z_2 \in Y \end{cases}$

$\le \|(x+y) - (z_1+z_2)\| \le \|x - z_1\| + \|y - z_2\| \le |||[x]||| + |||[y]||| + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\varepsilon \to 0 \Rightarrow$ н.Δ $\therefore$ ~~$|||[x]||| + |||[y]|||$~~ $|||[x]+[y]||| \le |||[x]||| + |||[y]|||$

X - лин. пр-во

$(X, \|\cdot\|_1)$

$(X, \|\cdot\|_2)$

К., че $\|\cdot\|_2$ е по-силна от $\|\cdot\|_1$, ако $\exists$ const $c>0$:

$\boxed{\|x\|_1 \le c.\|x\|_2}$ $\forall x\in X$

Тв| $\|\cdot\|_2$ е по-силна от $\|\cdot\|_1$ $\Leftrightarrow$ $\exists c>0$, $B_{\|\cdot\|_2} \subset c B_{\|\cdot\|_1}$

$\Rightarrow)$ $x \in \bar{B}_{\|\cdot\|_2} \Rightarrow \|x\|_2 \le 1$

$\Rightarrow \|x\|_1 \le c \Rightarrow \frac{x}{c} \in \bar{B}_{\|\cdot\|_1}$

$x \in c\bar{B}_{\|\cdot\|_1}$

→ за по-силната норма кълбото е по-малко, т.е. отв. кълба са повече

$\Leftarrow)$ Нека $x \neq \theta$

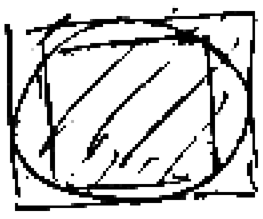
$\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = 1$ $\quad \frac{x}{\|x\|_2} \in B_{\|\cdot\|_2}$

$\Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_1 \le c \Rightarrow \|x\|_1 \le c.\|x\|_2$

---

def| $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ се наричат екв., ако $\exists$ $c_1>0$ и $c_2>0$ такива, че

$c_2\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le c_1\|x\|_2$



$C[a,b]$

$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t\in[a,b]\}$

$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$

} → задача от еквивалентни са

$\|f\|_p \le \left(\int_a^b \|f\|_\infty^p dt\right)^{1/p} = \|f\|_\infty \cdot (b-a)^{1/p}$

$\|f_n\|_\infty \to \infty$ $\quad \|f_n\|_1 = 1$

Твърдение

$(X, \|\cdot\|)$ нормирано пр-во

$\dim X = n$

Тогава, ако $(X, \|\cdot\|_1)$ норм. пр., то $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ са екв.

д-во:

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ лин. нез.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) e_i$$

→ това е при $p=1$

дефиниране

$$\boxed{\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(x)|} \quad (*)$$

→ произволна

$\|\cdot\|$ е липшицова отн. $\|\cdot\|_1$

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| = \Big\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) e_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(y) e_i\Big\| =$$

$$= \Big\|\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i(x) - \lambda_i(y)) \cdot e_i\Big\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(x) - \lambda_i(y)| \cdot \|e_i\| \leq$$

$$\leq \max\{\|e_i\| : i = \overline{1,n}\} \cdot \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(x-y)| =$$

$$= \underbrace{\max\{\|e_i\| : i = \overline{1,n}\}}_{const} \cdot \|x-y\|_1$$

S_1 - сфера норма $(*)$

$S_1 = \{x \in X : \|x\|_1 = 1\}$

S_1 е компакт в $(X, \|\cdot\|_1)$

$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset S_1 \qquad \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(x_m)| = 1$

$$\Downarrow$$

$\forall$ р-ця $\{\lambda_i(x_m)\}_{m=1}^{\infty} \subset [-1,1]$ $\forall i = \overline{1,n}$

$\{x_{m_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$

$\{\lambda(x_{m_\ell})\}_{\ell=1}^{\infty}$ е сходяща $\forall i = \overline{1,n}$

$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . e_i$ $\qquad \lambda_i = \lim_{\ell \to \infty} \lambda_i (x_{m_\ell})$

$\| x_{m_\ell} - \bar{x} \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | \underbrace{\lambda_i (x_{m_\ell}) - \lambda_i}_{1 \text{ нормата}} | \xrightarrow[\ell \to \infty]{} 0$

$x_{m_\ell} \xrightarrow[\ell \to \infty]{} \bar{x}$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} | \lambda_i (x_{m_\ell}) | = 1 \underset{\ell \to \infty}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 1$

$\Rightarrow \| \bar{x} \|_1 = 1$ (доказахме, че е компакт)

$\Rightarrow$ Съществуват $\boxed{m > 0}$, $M > 0$: $m \le \|x\| \le M \quad \forall x \in S_1$

$x \in X$, $x \ne \theta$ $\qquad \frac{x}{\|x\|_1} \in S_1 \Rightarrow m \le \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \le M \Rightarrow \boxed{m \|x\|_1 \le \|x\| \le M \|x\|_1}$ $\forall x \in X$

екв.

(X, d) метрично простр.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$

се нарича фундаментална, ако $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m \ge n_0 \ \forall n \ge n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon$

(разстоянията стават малки)

др. начин да го запишем:

$\sup \{ d(x_n, x_{n+p}) : p \in \mathbb{N} \} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

- фундаменталните р-ци са ограничени

$1 > 0$

n_0 $\qquad d(x_{n_0}, x_n) < 1 \quad \forall n \ge n_0$

$\qquad d(x_{n_0}, x_i) \ , \ i = \overline{1, n_0 - 1}$

- (X, d) се нарича пълно, ако $\forall$ фунд. р-ци са сходящи.
- Ако $(X, \|\cdot\|)$ нормирано пр-во, $(X, \|\cdot\|)$ се нарича Банахово, ако X с $d(x,y) = \|x - y\|$ е пълно метрично пр-во.

Примери:

1) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$

2) $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ е Банахово

$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C[a,b]$ е фундаментална, т.е. (Н.В.У на Коши)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n_0\ \forall n \geq n_0 : \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$

$t \in [a,b]$ $\quad |f_m(t) - f_n(t)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty$

$\Rightarrow \{f_m(t)\}_{m=1}^\infty \subset F$ е фундаментална

$\Rightarrow \forall t \in [a,b]\ \exists f(t) \in F,\ f(t) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(t)$

$\|f_m - f\|_\infty \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

$\Leftrightarrow f_m \overset{\rightrightarrows}{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}} f$ в/у $[a,b]$

това искаме да проверим

и ze р-уо^5 от която нормата е равном. норма

(f е деф. в/у $[a,b]$, сега д. пр., че f е непр. и ще покажем е равном. непр. към f)

$\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\quad \forall m \geq n_0\ \forall n \geq n_0 : \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$

$|f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [a,b]\ \forall m \geq n_0\ \forall n \geq n_0$

$m \geq n_0$ фикс. и пускаме $n \to \infty$

$\to$ при гр. преход може да стане и $\leq$

$\Rightarrow |f_m(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [a,b],\ \forall m \geq n_0$

„това е очевидно, докато някой не трябва да го докаже" - Н.Р.

$\Rightarrow \|f_m - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n_0$

$\Rightarrow \|f_m - f\|_\infty \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$
равном. гр-ца на непр. $\Rightarrow f \in C[a,b]$

3) ℓ_p е Банахово
$p \geq 1$

$x^m = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m, \dots) \in \ell_p$

(m - номер ред, 1 - коорд.)

$\{x^m\}_{m=1}^\infty$ фунд. в ℓ_p

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall m \ge n_0$ ~~...~~ $\forall \ell \in \mathbb{N}: \|x^m - x^{m+\ell}\|_p < \varepsilon$

$|x_i^m - x_i^{m+\ell}| \le \|x^m - x^{m+\ell}\|_p$

$\Rightarrow \{x_i^m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ е фундаментална (щом е фунд., то е огр.)

$x_i^m \xrightarrow[m\to\infty]{} \bar{x}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots$

$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)$ (не сме каз., че е в ℓ_p и че самата ред. клони __)

$\|x^m\|_p \le C \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^m|^p\right)^{1/p} \le C \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$\sum_{i=1}^{n} |x_i^m|^p \le C^p \quad \forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Big\downarrow \ m \to \infty$

$\sum_{i=1}^{n} |\bar{x}_i|^p \le C^p \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (за $\forall n$ парциалните суми са огр. отгоре)

$\sum_{i=1}^{\infty} |\bar{x}_i|^p \le C^p \Rightarrow \|\bar{x}\|_p \le C$ и $\bar{x} \in \ell_p$ (този ред има крайна Σ)

(проверихме, че ф-ята е в ℓ_p и ост. да докажем, че е гр-я)

Остава да проверим $\|x^n - \bar{x}\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \ge m_0\ \forall \ell \in \mathbb{N}: \|x^m - x^{m+\ell}\|_p < \varepsilon$

$\sum_{i=1}^{N} |x_i^m - x_i^{m+\ell}|^p < \varepsilon^p \quad \forall m \ge m_0 \quad \forall \ell \in \mathbb{N},\ \forall N \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ пр. крайна Σ и в нея гр. преход

$\ell \to \infty$

$\sum_{i=1}^{N} |x_i^m - \bar{x}_i|^p \le \varepsilon^p \quad \forall m \ge m_0 \quad \forall N \in \mathbb{N}$

$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^m - \bar{x}_i|^p \le \varepsilon^p \quad \forall m \ge m_0$

$\|x^m - \bar{x}\|_p \le \varepsilon \quad \forall m \ge m_0$, док. пълнотата

20.10.17г.

$(X, \|\cdot\|)$ – норм. пр-во / Банахово

$d(x,y) = \|x-y\|$

(X, d)

Заб. 1 Ако X - Бан. пр. $Y \subset X \Rightarrow X$ е банахово
затв. подпр.

1) $C([a,b], \underset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_\infty)$

2) $l_p = \{x = (x_1, x_2, \dots) : \sum |x_i|^p < \infty\}$

$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$, $p \geq 1$

3) $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty) \supset (c_0, \|\cdot\|_\infty)$

4) $(X, \|\cdot\|)$ Банахово пр., $Y \subset X$ затв. подпр.

$\Rightarrow (X/Y, \|\cdot\|')$ - банахово

$\|[x]\|' = \inf\{\|x-y\| : y \in Y\}$

Заб. 2 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n \in X$ и нека $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$

$\Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална (от абс. сх. $\Rightarrow$ сх.)

$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$\| S_n - S_{n+p}\| = \|\sum_{i=n+1}^{n+p} x_i\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|x_i\|$

$p \in \mathbb{N}$

и $\sum \|x_n\| < \infty \Rightarrow \{\|x_1\| + \dots + \|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална

$\{[x_n]\}_{n=1}^{\infty} \subset X/Y$

фундаментална

$\exists$ подредица $\{[x_{n_k}]\}_{k=1}^{\infty}$ такава, че $\|| [x_{n_{k+1}}] - [x_{n_k}] \|| < \frac{1}{2^k}$, $k \geq 1$

$\tilde{x}_{n_1} := x_{n_1}$

$\tilde{x}_{n_2} \in [x_{n_2}]$, $\| \tilde{x}_{n_2} - \tilde{x}_{n_1} \| < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} > |||[x_{n_2}]-[x_{n_1}]||| = |||[\tilde{x}_{n_2}-x_{n_1}]||| = \inf\{\|\tilde{x}_{n_2}-(x_{n_1}+y)\| : y\in Y\}$

сумат ∀ ел-т
класа на ела $[x_{n_1}]$

$\tilde{x}_{n_k} \longrightarrow \tilde{x}_{n_{k+1}} \in [x_{n_{k+1}}]$

$\|\tilde{x}_{n_{k+1}}-\tilde{x}_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \quad \forall k\in N$

$\{\tilde{x}_{n_k}\}_{n=1}^{\infty} \subset X$

$\|\tilde{x}_{n_{k+1}}-\tilde{x}_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|$ е сх. $\overset{\text{зад.}}{\Rightarrow} \sum (x_{n_{k+1}}-x_{n_k}) < \infty$

$\tilde{x}_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \tilde{x}$ (кандидат за граница)

$|||[x_{n_k}]-[\tilde{x}]||| = |||[\tilde{x}_{n_k}-\tilde{x}]||| \le \|\tilde{x}_{n_k}-\tilde{x}\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Упр. (Ако $\{x_n\}$ фунд. и $x_{n_k} \longrightarrow x$ $\}$ $\Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

$\|x_{n_k}-x\| \le \underbrace{\|x_n - x_{n_k}\|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|x_{n_k}-x\|}_{\frac{\varepsilon}{2}}$

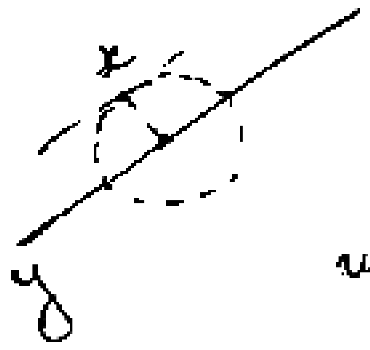
„к-то е на наше разположение"

$n \ge n_0$
$n_k \ge n_0$

$dist(x,A) = \inf\{d(x,y) : y\in A\}$

Лема X - нормирано, $Y \subsetneq X$ зат. подпр., $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists\, x\in X,\ \|x\|=1,\ dist(x,Y) > 1-\varepsilon$



фактор.
X/Y inf.

$1-\varepsilon < |||[z]||| < 1$

ще намерим $\tilde{z}\in[z]$, $\|\tilde{z}\| < 1$

$x = \frac{\tilde{z}}{\|\tilde{z}\|}$ $\quad \|x-y\| \geq \||[x]\|| = \frac{1}{\|\tilde{z}\|} \cdot \||[\tilde{z}]\|| > \frac{1-\varepsilon}{\||\tilde{z}\||} > 1-\varepsilon$

$y \in Y$ ∎

$\|x\| = 1$

Тв| Ако имаме норм. пр. X, то тогава

$\dim X < \infty \iff \overline{B_X}$ е компактно.

д-во

$\Rightarrow)$ $X \sim (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ (ако X е крайномерно, то по опр. е $\mathbb{R}^n$)

$\Leftarrow)$ $(X, \|\cdot\|)$

допускаме, че $\dim X$ е безкрайномерно

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{B_X}$, $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$

$\|x_n\| = 1$

$Y_1 = \operatorname{span}\{x_1\}$

$\|x_2\| = 1$, така $\operatorname{dist}(x_2, Y_1) \geq \frac{1}{2}$

$Y_2 = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$

$\|x_3\| = 1$, $\operatorname{dist}(x_2, Y_2) \geq \frac{1}{2}$ → няма как да е сх. (попълване)

Изоморфни наз. инт. пр., ако има биекция, която е непр. и обратната е непр.

$(X_1, \|\cdot\|_1) \sim (X_2, \|\cdot\|)$ изоморфни

$i: (X_1, \|\cdot\|_1) \to (X_2, \|\cdot\|_2)$

i → биекция, линейна

i, i^{-1} → непрекъснати

$(X, \|\cdot\|_1) \xrightarrow{id} (X, \|\cdot\|_2)$ е пол. али

$Y \subset X$ норм.

$\dim Y < \infty$

$\Rightarrow Y$ - затв. подп.

Т-ма | (X, d) метрично пространство и $i: X \longrightarrow \tilde{X}$ инекция, $\Rightarrow \exists (\tilde{X}, \operatorname{dist})$ пълно метрично пр-во и $i: X \to \tilde{X}$ (т.е. $d(x,y) = \operatorname{dist}(i(x), i(y))$ $\forall x, y \in X$), което е изометрия - запазва разстоянието, $i(X)$ е гъсто в $\tilde{X}$

д-во

Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, фунд. редици в X

$x \sim y$, ако $d(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$x \sim y$, $y \sim z$ $\quad d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\tilde{X} = \{[x] : x \in X\}$

$\operatorname{dist}([x], [y]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$

Първо да видим, че гр-ята ∃

$\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална (защото $|d(x_m, y_n) - d(x_{n+p}, y_{n+p})| \le$
$\le d(x_n, x_{n+p}) + d(y_n, y_{n+p})$)

$\to$ гр-ята ∃

$x' = \{x_n'\} \sim x$ $\qquad d(x_n', y_n') \le \underbrace{d(x_n', x_n)}_{\to 0} + d(x_n, y_n) + \underbrace{d(y_n, y_n')}_{\to 0}$

$y' = \{y_n'\} \sim y$

$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n', y_n') \le \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$

Аналог. получаваме и обратното за "≥" => "="

Следващата проверка: че съответства разстояние.

$dist([x], [y]) = \lim d(x_n, y_n) \le dist([x], [z]) + dist([z], [y])$ => вече разстоянието е нер-во

$[z]$

$d(x_n, y_n) \le d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$

остава да проверим, че е пълно:

$\{[x_n]\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{X}$ - фундаментална (S)

и сега търсим гр-та (какво може да бъде?)

x_1 ——— k_1

x_2 ——— k_2 → диагонален процес

$x_n = \{x_n^i\}_{i=1}^{\infty}$ фунд. ред. в X

$\frac{1}{n} > 0 \Rightarrow \exists\, m_n \in \mathbb{N} : \forall i \ge m_n : d(x_n^i, x_n^{m_n}) < \frac{1}{n}$

$x = (x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \dots, x_n^{m_n}, \dots)$ → искаме да следим, че това е фунд. ред. (*)

8

$x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \dots, x_n^{m_n}, \dots)$ – искаме да сме сиг. че това е фунд. [illegible]

Искаме да покажем, че $\{x_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} [x]$

(*) $\{x_n^{m_n}\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална (използваме (1))

$\underline{\varepsilon>0} \Rightarrow \exists\, q(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} : \operatorname{dist}([x_q],[x_{q+k}]) < \varepsilon \quad \boxed{\forall q \geq q(\varepsilon)\ \forall k \in \mathbb{N}}$ (2)

$\lim\limits_{i\to\infty} d(x_q^i, x_{q+k}^i) < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists\, j_{q,k} \in \mathbb{N}\ \forall j \geq j_{q,k} : d(x_q^j, x_{q+k}^j) < \varepsilon$

$d(x_q^{m_q}, x_{q+k}^{m_{q+k}}) \leq d(x_q^{m_q}, x_q^j) + d(x_q^j, x_{q+k}^j) + d(x_{q+k}^j, x_{q+k}^{m_{q+k}}) < \frac{1}{q} + \varepsilon + \frac{1}{q+k} \overset{(2)}{<} \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon < 3\varepsilon$

(колко трябва да е j?)

(j е на наше разположение)

$d(x_q^{m_q}, x_q^j) < \frac{1}{q}$, ако $j \geq m_q$

$d(x_{q+k}^{m_{q+k}}, x_{q+k}^j) < \frac{1}{q+k}$, ако $j \geq m_{q+k}$

$d(x_q^j, x_{q+k}^j) < \varepsilon$, ако $j \geq j_{q+k}$

$\forall q \geq q(\varepsilon)$
$\forall k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ фундаментална на редица

$\operatorname{dist}([x_n],[x]) = \lim\limits_{i\to\infty} d(x_n^i, x_i^{m_i}) \leq 4\varepsilon \quad \forall n \geq q(\varepsilon)$

$<_{n\to\infty}$

$d(x_n^i, x_i^{m_i}) \leq d(x_n^i, x_n^{m_n}) + d(x_n^{m_n}, x_i^{m_i}) < 4\varepsilon$ за $n \geq q(\varepsilon)$, $\forall i \geq m_n$, $i \geq n$

$\underline{\underline{\varepsilon>0}}$ $\quad d(x_n^i, x_n^{m_n}) < \frac{1}{n} \quad \forall i \geq m_n$

$\left.\begin{matrix} i \geq n \\ n \geq q(\varepsilon) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(x_n^{m_n}, x_i^{m_i}) < 3\varepsilon$ (както по-горе) $\quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{q(\varepsilon)} < \varepsilon$

$\Rightarrow (\tilde{X}_1, \operatorname{dist})$ е пълно метрично пр-во

$x \in X$

$i(x) = [(x, x, \ldots)]$

$\operatorname{dist}([x],[y]) = \lim_{n\to\infty} d(x,y) = d(x,y)$ — x, y

$i(X)$ е гъсто в $\tilde{X}$

$[x] \in \tilde{X}$

~~x~~ $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ фунд. редица

$i(x_n) = [(x_n, x_n, \ldots)]$

$i(x_n) \longrightarrow [x]$

$\operatorname{dist}(i(x_n), i[x]) = \lim_{i\to\infty} d(x_n, x_i) \xrightarrow[n\to\infty]{?} 0$

i - колкото ни искаме да е голям

$\to 0$ (от фундаменталността на $\{x_n\}$)

Теорема (за продължението)

(X, d) - метрично пр-во

(Z, g) - пълно метр. пр-во

$Y \subset X$, Y гъсто в X

$f: Y \to Z$ е равном. непр.

равном. непр.:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in Y$
$d(x', x'') < \delta$:
$g(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists (!)\ \tilde{f}: X \to Z$, $\tilde{f}$ равном. непр., $\tilde{f}|_Y = f$

Д-во:

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ фундаментална $\Rightarrow \{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$ е фундаментална

$\varepsilon > 0 \to \delta > 0 \ldots \forall y', y'' \in Y$, $d(y', y'') < \delta$, $g(f(y'), f(y'')) < \frac{\varepsilon}{3}$

от някой номер нататък разст. ще стане δ

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N} : d(x_n, x_{n+p}) < \delta$

$\Rightarrow \rho(f(x_n), f(x_{n+p})) < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \in \mathbb{N}$

понеже Y е плътно в X $\rightarrow$ фунд $\rightarrow \{f(x_n)\}$ фунд. пр-вото е пълно $\rightarrow \exists$ гр.

$x \in X \setminus Y$

$\Rightarrow \exists \{x_n\} \subset Y,\ \boxed{x_n \rightarrow x}$

$\tilde{f}(x) := \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ (трябва да видим дали е коректно)

пр-ята отделно $\exists$

$y_n \rightarrow x$ $\quad x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots \rightarrow$ фунд (редицата е на други четните $\rightarrow x$, нечетните $\rightarrow x \Rightarrow$ фунд.)

$x_n \rightarrow x$ $\quad \Rightarrow f(x_1)\, f(y_1)\, f(x_2)\, f(y_2), \ldots$ — фунд

$\{x_n\}, \{y_n\} \subset Y$

$\tilde{f}$ равном. непр. $\qquad \delta - d(x', x'') = \nu > 0$

$\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$

$x', x'' \in X,\ d(x', x'') < \delta$ (где трябва да ги апрокс. с ел-ти от Y)

$y' \in Y,\ d(x', y') < \frac{\nu}{2},\ \rho(\tilde{f}(x'), f(y')) < \frac{\varepsilon}{3}$ (ако имаме р-ята, то може да изберем достатъчно ел-ти, така че и двете да са изп.)

$y'' \in Y,\ d(x'', y'') < \frac{\nu}{2},\ \rho(\tilde{f}(x''), f(y'')) < \frac{\varepsilon}{3}$

$d(y', y'') \leq d(y', x') + d(x', x'') + d(x'', y'') < \frac{\nu}{2} + \frac{\nu}{2} + d(x', x'') = \delta$

$\Rightarrow \rho(f(y'), f(y'')) < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow$ Значи

$\rho(\tilde{f}(x'), \tilde{f}(x'')) \leq \rho(\tilde{f}(x'), f(y')) + \rho(f(y'), f(y'')) + \rho(f(y''), \tilde{f}(x''))$
$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ ■

<u>Т-ма</u> (за единственост на попълнението)

(X, d) - метрично пр-во

$X \xrightarrow{i_1} i_1(X) \subset (X_1, d_1)$, i_1 - изометрия
$i_1(X)$ - плътно в (X_1, d_1)
(X_1, d_1) - пълно

$X \xrightarrow{i_2} i_2(X) \subset (X_2, d_2)$ i_2 - изом., $i_2(X)$ плътно в (X_2, d_2) пълно

Тогава (X_1, d_1) и (X_2, d_2) са изометрични, като $i_1(X)$ съотв. на $i_2(X)$

$i: (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$
$d_1(x,y) = d_2(i(x), i(y))$
$\forall x, y \in X_1$
и i е биекция

(вложените нарекоха да са единствени)

~~$X \xrightarrow{i_1} i_1(X)$~~

д. во:

$X_2 \supset i_2(X) \xleftarrow{i_2} X \underset{i_1^{-1}}{\overset{i_1}{\rightleftarrows}} i_1(X) \subset X_1$

$i_2 \circ i_1^{-1} : i_1(X_1) \to i_2(X) \subset X_2$

$i := \widetilde{i_2 \circ i_1^{-1}} : X_1 \longrightarrow X_2$

това е изометрия и сега няколко проверки:

сега
- еднозн. разоп. (непр. на разоп.)
- че е изометрия
- че е биекция

(композицията на изометрии е изометрия)

- изометрия (използваме че X_1 е пълно)

$d_1(x,y) = \lim_{n\to\infty} d_1(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d_2(i(x_n), i(y_n)) \overset{i\text{-непр}}{=} d_2(i(x), i(y))$
$\Rightarrow$ е изометрия

$\left\{ \begin{array}{l} x \leftarrow \{x_n\} \subset i_1(X) \\ y \leftarrow \{y_n\} \subset i_1(X) \end{array} \right\}$

- биекция (изп. че X_2 е пълно)

$z \in X_2$

$\{z_n\} \subset i_2(X)$

$z_n \to z$

$z_n = i(x_n)$, $x_n \in i_1(X)$

$\{z_n\}$ фунд. $\Rightarrow$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset i_1(X)$ фунд.

$x_n \longrightarrow x \in X_1$

$z_n = i(x_n) \longrightarrow i(x) \in X_2$

$z_n \longrightarrow z \quad \Rightarrow i(x) = z \quad \rightarrow$ сюрекция

$\rightarrow$ биекция ■

$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \quad |(x'+y') - (x''+y'')| \leq |x' - x''| + |y' - y''|$

$(X, \|\cdot\|) \longrightarrow \widetilde{X}$ събирането умн. с число (фикс).

$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$ (нормата се продължава (з, допълнен.)

$(X, \|\cdot\|) \longrightarrow (\widetilde{X}, \underbrace{\widetilde{\|\cdot\|}}_{\text{норма}})$

$F : X \longrightarrow Y$
линейно изобр.

$(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$

Еквивалентни са усл.:

(а) F е непр.

(б) F е равномерно непр.

(в) F е непр. в 0

(г) F е ограничено в/у $\overline{B}_X$

(д) $\exists$ $C \geq 0$ такова, че $\|F(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X$

Док. (в) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (а) $\Rightarrow$ (в)

$\|F(x) - F(y)\|_Y = \|F(x-y)\|_Y < \varepsilon \quad \forall x, y \in X, \|x-y\| < \delta$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall z \in X, \|z\| < \delta : \|F(z)\| < \varepsilon$

д: (г) => g)

$x \in X,\ x \neq \theta$

$\left\| F\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|_Y \leq C$

$\|F(x)\|_Y \leq C . \|x\|_X$ g) => г)

(б) <=> (г)

д) $1 > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0\ \forall x \in X,\ \|x\|_X \leq \delta : \|F(x)\|_Y \leq 1$

$\left\| \frac{x}{\delta} \right\|$

$\forall x \in \overline{B_X} : \|F(x)\|_Y \leq \frac{1}{\delta}$ ■

Опeратор на корма

$\|F\| = \sup \{ \|F(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1 \} = \inf \{ C > 0 : \|F(x)\|_Y \leq C . \|x\|_X\ \forall x \in X \}$

$\mathcal{B}(X, Y)$ - огр. лин. функционали $X \to Y$

$(F + G)(x) = F(x) + G(x)$ $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|)$

$(\lambda F)(x) = \lambda F(x)$

? Ако образът Y е банахово (пълно) то $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|)$

$id : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$

$\|x\|_2 \leq C . \|x\|_1$ ($\|x\|_1$ е по-силна??

27.10.17г.

X - линейно пространство $\qquad \ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}$

$X^{\#} := \{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ - линейно} \}$

Тв| X - линейно пространство

(а) $\left.\begin{array}{l} f \in X^{\#} \\ f \neq \theta \end{array}\right\} \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\dim(X / \ker f) = 1$

$x' \in X,\ f(x') \neq 0$

$x_0 = \dfrac{x'}{f(x')},\ f(x_0) = 1$

$x = f(x) \cdot x_0 + (\underbrace{x - f(x) \cdot x_0}_{\in \ker f})$

$f(x - f(x) x_0) = 0$

$x = \lambda x_0 + y$

$y \in \ker f$

$\lambda \in \mathbb{R}$

(б) $f, g \in X^{\#} \setminus \{0\},\ \ker f = \ker g \Rightarrow f = \lambda g$

$x = f(x) x_0 + y,\quad y \in \ker f$

$g(x) = f(x) \cdot g(x_0) + g(y) = f(x) \cdot g(x_0)$

$g = g(x_0) \cdot f$

(в) L хиперравнина в $X \Rightarrow \exists f \in X^{\#} \setminus \{0\},\ \ker f = L$

$X / L = \{ \lambda [x_0] : \lambda \in \mathbb{R} \}$ $\qquad f(x_0) = 1,\ f(y) = 0\ \forall y \in L$

$[x] = \lambda [x_0]$

$x - \lambda x_0 \in L$

$x = \lambda x_0 + y$

$f(x) = \lambda$

$(X, \|\cdot\|)$

$\|f\|_* = \sup\{|f(x)| : \|x\| \le 1\}$ → спрегнатата норма

$X^* = \{f \in X^{\#} : f \text{ непр}\}$

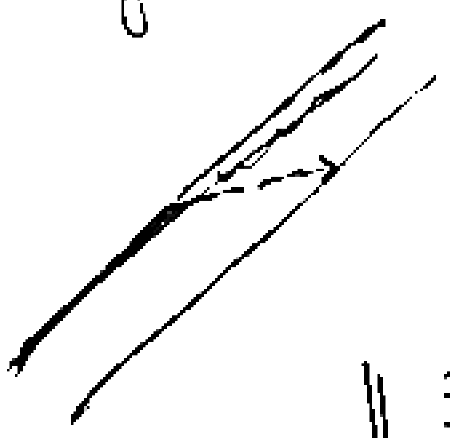
$(X^*, \|\cdot\|_*)$ → спрегнато (дуално) пространство на $(X, \|\cdot\|)$

Тв| Ако $f \in X^{\#}$. Тогава $f \in X^* \iff \ker f$ затворено

$\Leftarrow)$ $x_n \to x$

Искаме $f(x_n) \to f(x)$, т.е. $f(x_n - x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Доп. противното $\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall n_k \in \mathbb{N}: |f(x_{n_k} - x)| \ge \varepsilon_0$



$f\left(\frac{x_{n_k}-x}{f(x_{n_k}-x)}\right) = 1$ → те са на ниво 1 (ядрото е затв., значи това на ниво 1 е затв.)

$$\left\|\frac{x_{n_k}-x}{f(x_{n_k}-x)}\right\| = \frac{1}{\|f(x_{n_k}-x)\|}\cdot\|x_{n_k}-x\| \le \frac{1}{\varepsilon_0}\|x_{n_k}-x\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$y \in X,\ f(y) = 1$ $\quad \underbrace{y - \frac{x_{n_k}-x}{f(x_{n_k}-x)}}_{\in \ker f} \xrightarrow[k\to\infty]{} y$

$$f\left(y - \frac{x_{n_k}-x}{f(x_{n_k}-x)}\right) = 1 - 1 = 0$$

$\ker f$ е затв. $\Rightarrow$ и $y \in \ker f$?!? $\quad f(y) = 0$ ■

$\dim X = \infty$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\|x_n\| = 1$

$\mathrm{dist}(x_n, \mathrm{span}\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}) \ge \frac{1}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\qquad f(x_n) = n$

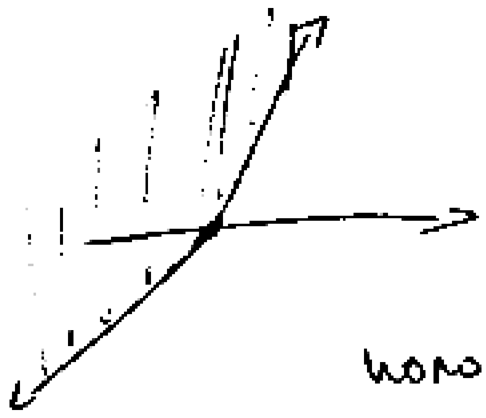
$\forall n \in \mathbb{N}$

X - реално лин. пр-во

$p: X \to \mathbb{R}$

p - положително хомогенен функционал, ако $p(\alpha x) = \alpha p(x) \ \forall \alpha > 0$

p - субадитивен ф-л, ако $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \ \forall x, y \in X$



$p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \quad (p(-x) = p(x))$ → симетричност

положителен хомогенен и субадитивен → полунорма

Т-ма | (Хан-Банах)

X - реално лин. пр-во

Y - линейно подпр. на X

$p: X \to \mathbb{R}$

пол. хом.

субадитивен

$f \in Y^{\#}, \ f \leq p|_Y$

Тогава ~~...~~ съществува $F \in Y^{*}$ такова, че $F|_Y \equiv f$ и $F \leq p$.

лема на Цорн

конфранта

$\mathcal{P} = \{(M', f') : M'$ линейно подпр. на $X, M' \supset Y,$
$f' \in (M')^{\#}, f'|_Y \equiv f, f' \leq p|_{M'}\}$

$(Y, f) \in \mathcal{P}$ (т.е. не е празно)

$(M', f') \prec (M'', f'')$

ако $M' \subset M''$

и $f''|_{M'} \equiv f'$

$\{(M_\alpha, f_\alpha)\}_\alpha$ верига в $\mathcal{P}$

$\tilde{M} = \bigcup_\alpha M_\alpha$

$\tilde{f}(x) = f_\alpha(x)$, ако $x \in M_\alpha$.

$(\tilde{M}, \tilde{f}) \in \mathcal{P}$

мажоранта на веригата

Цорн $\to$ има максимален елемент спрямо тази наредба

да., че ~~включването~~ $M \subsetneq X$

$x_1 \notin M$

$\operatorname{span}(M \cup \{x_1\})$

$F_1(x + \lambda x_1) = f(x) + \lambda \cdot \alpha$ → лин. ф-ция в/у едно по-голямо нещо

$F_1(x_1) = \alpha$

трябва да изберем α така че F_1 да се доминира от p

$F_1(x + \lambda x_1) \le p(x + \lambda x_1) \quad \forall x \in M \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$f(x) + \lambda\alpha \le p(x + \lambda x_1)$

$\lambda > 0$: $f\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \alpha \le p\left(\frac{x}{\lambda} + x_1\right)$!

$\Updownarrow$

$f(x) + \alpha \le p(x + x_1)$

и $f(x) - \alpha \le p(x - x_1) \quad \forall x \in M$

$\Updownarrow$

$f(x) - p(x - x_1) \le \alpha \le p(y + x_1) - f(y)$

$\forall x \in M \ \forall y \in M$

$\exists \alpha$ .. точно, когато $f(x) - p(x - x_1) \le p(y + x_1) - f(y)$

$\forall x \in M \ \forall y \in M$

$F(x+y) \le p(x-x_0)+p(y+x_0)$

p субадитивен $\quad F|_M \le p$

$\Rightarrow F(x+y) \le p(x+y) = p(x-x_0+y+x_0) \le p(x-x_0)+p(y+x_0)$ ■

II-ра Т-ма на Хан-Банах |

$(X, \|\cdot\|)$, $f \in Y^* \Rightarrow \exists\, F \in X^*$, $F|_Y = f$ и $\|F\|_* = \|f\|_*$

д-во:

$p(x) = \|f\|_* \cdot \|x\|$

$|f(y)| \le \|f\|_* \cdot \|y\| = p(y)$

$\exists F \in X^*,\ F|_Y = f,\ F \le p$

$\Rightarrow F(x) \le \|f\|_* \cdot \|x\| \quad \forall x \in X$

$-F(x) = F(-x) \le \|f\|_* \cdot \|x\|$

$\Rightarrow |F(x)| \le \|f\|_* \cdot \|x\|$

$\|F\|_* \le \|f\|_* = \sup\{|F(x)| : \|x\| \le 1, x \in Y\}$

$\Rightarrow \|F\|_* = \|f\|_*$

Т-ма за отделимост |

$(X, \|\cdot\|)$

$C \subset X$
отворено изпъкнало

$x_0 \notin C \Rightarrow \exists f \in X^* : f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in C$

→ ф-онал на Минковски

Не сме сиг., че ще може да стане ∞; дали може да разшир. толкова C, че x ще намери в него

д-во: $\theta \in C \subset X \qquad \mu_C(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda C\}$

Ако $\theta \in \operatorname{int} C$, то $\mu_C : X \to [0, +\infty)$

и μ_C непрекъснат

μ_C е положително хомогенен, ако C-изпъкнало $\Rightarrow \mu_C$ е субадитивен

$$\{x : \mu_C(x) \le 1\} = \overline{C}$$

$$\{x : \mu_C(x) < 1\} = \operatorname{int} C$$

△ д-во

$y_0 \in C$ транслираме $C \to C - y_0$, $x_0 \to x_0 - y_0$

Б.о.о. $\theta \in C$

$Y = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ $\quad g \in Y^*$

$g(x) = \lambda$

$g \le \mu_C|_Y$

$g(\lambda x_0) = \lambda$

$\mu_C(\lambda x_0) = \lambda \cdot \mu_C(x_0) \ge \lambda = g(\lambda x_0)$

$x_0 \in C \Rightarrow \mu_C(x_0) \ge 1$

$\Rightarrow \mu_C$ мажорира g

$\lambda \le 0 \to$ о.к.

$\Rightarrow \exists f \in X^*$

$f \le \mu_C$ и $f(x_0) = g(x_0) = 1$

$f(x) \le \mu_C(x) < 1$, $\forall x \in C = \operatorname{int} C$

$f(x) < 1 = f(x_0)$ $\forall x \in C$

$B_\varepsilon(\theta) \subset C$

$f(x) < 1$ $\forall x, \|x\| < \varepsilon$

$f(x) \le \frac{1}{\varepsilon}, \forall x \in B_X$ (щом е огр. в/у кълбото $B_\varepsilon(\theta)$, то ще е и в/у единичното B_X, защото все едно го умн. по $\frac{1}{\varepsilon}$)

Следствие: A, B - изпъкнали

$\operatorname{int} A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists f \in X^*, \ f(x) < f(y) \ \ \forall x \in A \ \forall y \in B$

$\to$ също и на отворени

$0 \notin \underset{\text{отв.}}{C} = A - B = \bigcup_{y \in B} (A - y)$

$\Rightarrow \exists f \in X^*, \ 0 = f(0) > f(x) \ \ \forall x \in C$

$0 > f(x - y) \ \ \forall x \in A \ \forall y \in B$

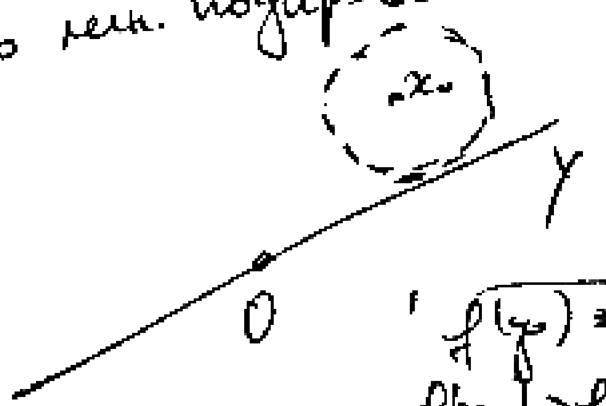
Следствие: Ако C е затв. изпъкнало и $x_0 \notin C$

$\Rightarrow \exists f \in X^*, \ f(x_0) < d \le f(x) \ \forall x \in C$

$\delta > 0, \ B_\delta(x_0) \cap C = \emptyset$ и прилагаме предишното

УкИ

! **Твърдение:** $(X, \|\cdot\|)$, Y затворено лин. подпр-во на X



$x_0 \notin Y$

$\delta = \operatorname{dist}(x_0, Y) > 0$

$\Rightarrow \exists f \in X^*, \ \|f\|_* = 1,$

$f|_Y = 0, \ f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y)$

$f(y_0) \neq 0$
$f(x_0) > f(\lambda y_0) = \lambda f(y_0)$
и ако $\lambda \to \infty$, нито

лин. функционал като е ограничен отгоре/отдолу, то той е 0

Д-во:

$B_\delta(x_0) \cap Y = \emptyset$

$\Rightarrow f \in X^*, \ f(x) > f(y) \ \forall x \in B_\delta(x_0) \ \forall y \in Y$

$f(x_0) > f(y) \ \forall y \in Y \Rightarrow f(y) = 0 \ \forall y \in Y$

Б.о.о. $\|f\|_* = 1$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0)$

Искаме от ХБ да изкараме нещо за нормата (за кълбо B_{x_0})

$f(x_0 + x) > 0 \quad \forall x, \|x\| < \delta$

$f(x_0) > -f(x) \quad \forall x, \|x\| < \delta$

$f(x_0 - x) > 0 \quad \forall x, \|x\| < \delta$

$f(x_0) > f(x)$

$|f(x)| < f(x_0) \quad \forall x, \|x\| < \delta$

$\delta = \sup\limits_{x \in B_\delta(\theta)} |f(x)| \le f(x_0) \qquad \underline{\underline{f(x_0) \geq \delta}}$

Сега $\|x_0 - y\| \geq \delta \quad \forall y \in Y$

$f(x_0) = f(x_0 - y) + \underbrace{f(y)}_{0} = f(x_0 - y) \le \|f\|_* \|x_0 - y\| = \|x_0 - y\| \quad \forall y \in Y$

$\le \inf$

$\Rightarrow f(x_0) \le \delta$

$f(x_0) = \delta$

__Следствие:__ X (за нормирано п.)

$\|x\| \neq \theta$

$\Rightarrow f \in X^*, \|f\|_* = 1, f(x) = \|x\|$ нека как да отделиме

ако нека вътрешността кълбото

теор. за отделимост $x \notin B_{\|x\|}(\theta)$

(... п. игр)

$(X, \|\cdot\|) \quad (X^*, \|\cdot\|_*) \quad (X^{**}, \|\cdot\|_{**})$

$X \xrightarrow{i} X^{**}$

$i(x)(f) = f(x) \quad \forall f \in X^*$

$i : X \longrightarrow X^{**}$

линейно

$\|i(x)\|_{**} = \sup\{|i(x)(f)| : \|f\|_* = 1\} =$

$= \sup\{|f(x)| : \|f\|_* = 1\} = \|x\|$

$|f(x)| \le \|f\|_* \cdot \|x\| \le \|x\|. \quad \forall f \ldots$

03.11.17г.

H - хилбертово (лин. пр-во над $\mathbb{C}$)

$\boxed{\text{пред хилбертово пр-во}}$

$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$

скаларно произведение, ако:

1) лин. по първи аргумент

$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in H \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

2) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in H$ (по втория аргумент не е лин., спрегнато линейно)

3) $\langle x, x \rangle \ge 0 \quad \forall x \in H$

4) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \theta$

$\langle \theta, x \rangle = \langle \theta, y \rangle = 0$

① $\mathbb{R}^n \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\mathbb{C}^n \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

② $\ell_2 \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} \qquad \left|\sum_1^n x_i \overline{y_i}\right|^2 \le \sum_1^n |x_i|^2 \sum_1^n |y_i|^2$

$\exists$ сх $\Leftarrow$ $\to$ сх $\quad$ сх

$\forall x \in H \ \forall y \in H$

$\rho(x_n) = x_n$

L_2 $\quad \int_a^b fg$

$\mathbb{R}$:

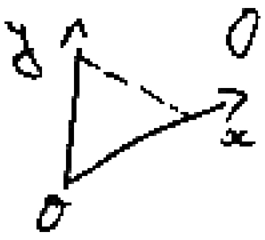
Т-ма | H, $\langle \cdot,\cdot \rangle$ предхилбертово пр-во. Тогава

(а) $|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle \quad \forall x,y \in H$ (Коши - Буняковски - Шварц)

Сх

(б) $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ е норма в H

д-во.



(а) $0 \le \left\langle y - \frac{\langle y,x\rangle}{\langle x,x\rangle} x,\ y - \frac{\langle y,x\rangle}{\langle x,x\rangle} x \right\rangle =$

$= \langle y,y\rangle - \frac{\langle y,x\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle x,y\rangle - \frac{\overline{\langle y,x\rangle}}{\langle x,x\rangle}\langle y,x\rangle + \frac{\langle y,x\rangle \cdot \overline{\langle y,x\rangle}}{(\langle x,x\rangle)^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{\langle x,x\rangle} =$

$= \langle y,y\rangle - 2\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle x,x\rangle} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle x,x\rangle} =$

$= \langle y,y\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle x,x\rangle} \ge 0$

(б) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \|y\|^2 =$

$= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \le$

$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ / $\Rightarrow$ е изпълнено нер-вото на Δ

$(H, \|\cdot\|)$ пълно $\Rightarrow$ H се нарича хилбертово

Равенство на успоредника

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

$\langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \cancel{\langle y,x\rangle} + \cancel{\langle x,y\rangle} + \|x\|^2 + \|y\|^2$

$- \cancel{\langle x,y\rangle} - \cancel{\langle y,x\rangle}$

(поляриз. тъжд.)

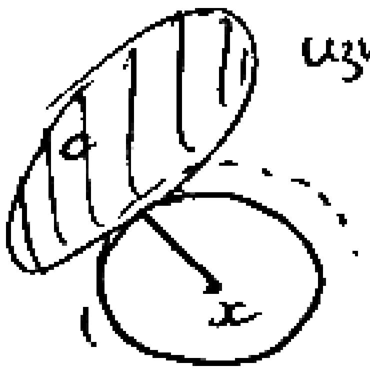
в $\mathbb{R}$: $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

$\mathbb{C}$: $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$

<u>Скал. произв. е непр. в $(H, \|\cdot\|)$</u>

$|\langle x,y\rangle - \langle u,v\rangle| \leq |\langle x,y\rangle - \langle x,v\rangle + \langle x,v\rangle - \langle u,v\rangle| \leq$

$\leq |\langle x, y-v\rangle| + |\langle x-u, v\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y-v\| + \|x-u\|\|v\|$



изпъкнало затворено

$x \in H$, $C \subset H$

$\mathrm{dist}(x, C) := \inf\{\|x-y\| : y \in C\}$

(ел-т, който реализира разст.)

най-близък ел-т

Тв| Ако $C \subset H$, C-затв. и изпъкнало, $x \in H$ $\Rightarrow \exists\, \tilde{x} \in C$: $\|x - \tilde{x}\| = \mathrm{dist}(x, C)$

(при това е единствено)

<u>д-во:</u>

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists y_n \in C$, $\|x-y_n\|^2 < [\mathrm{dist}(x,C)]^2 + \frac{1}{n}$

$\|y_{n+p} - y_n\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_{n+p}\|^2 - \|2x - y_n - y_{n+p}\|^2 \leq$

като в ур-то ще ни трябват (от усп)

$x - y_n$

$x - y_{n+p}$

$\leq 2\left([\mathrm{dist}(x,C)]^2 + \frac{1}{n}\right) + 2\left([\mathrm{dist}(x,C)]^2 + \frac{1}{n+p}\right) -$

$-4\left\|x - \frac{y_n + y_{n+p}}{2}\right\|^2$

C-изпъкнало $\Rightarrow \frac{y_n + y_{n+p}}{2} \in C \Rightarrow$

T-1 ... хилберт. пр)

$x \in H$

$\Rightarrow \|x - \frac{y_n + y_{n+p}}{2}\| \geq \operatorname{dist}(x, C)$

$\|y_{n+p} - y_n\|^2 \leq 4[\operatorname{dist}(x, C)]^2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+p} - 4[\operatorname{dist}(x, C)]^2 =$

$= \frac{2}{n} + \frac{2}{n+p} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}$

$\|y_{n+p} - y_n\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \forall p \in \mathbb{N}$

$\tilde{x} = \lim_{n \to \infty} y_n$

$\operatorname{dist}(x, C)^2 \leq \|x - y_n\|^2 \leq$

$\leq \operatorname{dist}(x, C)^2 + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \|x - \tilde{x}\| = \operatorname{dist}(x, C)$

Проверка

$y_1, y_2: \|x - y_1\| = \operatorname{dist}(x, C) = \|x - y_2\|$

$\|y_1 - y_2\|^2 = 2\|x - y_1\|^2 + 2\|x - y_2\|^2 - \|2x - y_1 - y_2\|^2 =$

$= 4\operatorname{dist}(x, C)^2 - 4\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\|^2 \leq$

$\leq 4\operatorname{dist}(x, C)^2 - 4\operatorname{dist}(x, C)^2 = 0 \Rightarrow$ са равни

T-ма) H хилбертово

F затворено лин. подпр-во на H.

Тогава $H = F + F^{\perp}$

$x \perp y \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} \langle x, y \rangle = 0$

$A \subset H$

$A^{\perp} = \{x \in H : x \perp y\ \forall y \in A\}$

ортогонално допълнение

$A^{\perp}$ затворено лин. подпр. на H

$x_n \to x$

$\langle x_n, y \rangle = 0 \quad \forall y \in A$ и

$\Rightarrow \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in A$

$T: F \oplus F^{\perp} \longrightarrow H$

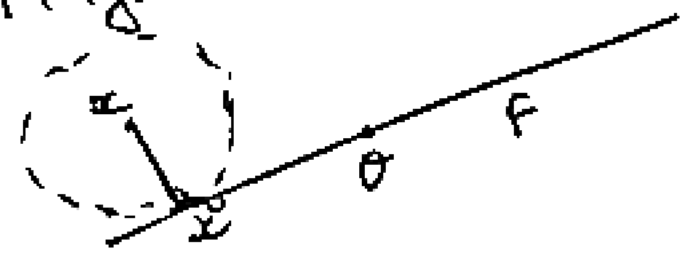
$T(x, y) = x + y$, $= \|(x, y)\|$

"> да докажем, че е биекция, за но един начин разлагане хилбертово пр-во

$F \cap F^{\perp} = \{\theta\}$

$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Пит. т-ма)

$\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$



Т.1 ... хилберт. пр)

Д-во $x \in H$

от твърдението $\tilde{x} \in F$,

$\|x - \tilde{x}\| = dist(x, F)$

$\|x - \tilde{x}\| \leq \|x - (\tilde{x} - \lambda z)\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\forall z \in F$

$\Downarrow$

$\|x - \tilde{x}\|^2 \leq \langle x - \tilde{x} - \lambda z, x - \tilde{x} - \lambda z \rangle =$

$= \|x-\tilde{x}\| - \lambda \langle z, x - \tilde{x} \rangle - \bar{\lambda} \langle x - \tilde{x}, z \rangle + |\lambda|^2 \|z\|^2$

$2\mathrm{Re}(\lambda \langle z, x - \tilde{x} \rangle) \leq |\lambda|^2 \|z\|^2$

$\lambda = t \overline{\langle z, x - \tilde{x} \rangle}$, $t > 0$

$2t |\langle z, x - \tilde{x} \rangle|^2 \leq t^2 |\langle z, x - \tilde{x} \rangle|^2 \cdot \|z\|^2$ $/ : t$

$2 |\langle z, x - \tilde{x} \rangle|^2 \leq t |\langle z, x - \tilde{x} \rangle|^2$

$t \to 0$

$\Rightarrow$ $\langle z, x - \tilde{x} \rangle = 0$ $\forall z \in F$

$\Rightarrow x - \tilde{x} \in F^{\perp}$

$x = \underset{\in F}{\tilde{x}} + \underset{\in F^{\perp}}{(x - \tilde{x})}$ ∎

<u>Следствие:</u> $(F^{\perp})^{\perp} = F$

ако F затв. лин. пр-во

$F \subset (F^{\perp})^{\perp} = Z^{\perp}$

$x \in H$, $x \notin F$, $x = y + z$, $y \in F$, $z \in Z$, Ако $z \neq \theta$, то $\langle x, z \rangle = \|z\|^2 \neq 0$ и $x \notin Z^{\perp}$ ∎

H хилбертово простр.

$S \subset H$ се нарича ортонормирано мн-во, ако $\langle s_1, s_2 \rangle = 0$ $\forall s_1 \neq s_2$, (20)

$s_1, s_2 \in S$ и $\langle s, s \rangle = 1$ $\forall s \in S$.

(17)

хилберт. пр.)

Т-ма H – : **Def** Ако S е максимално по отношение на включването, S се нарича ортонормиран базис на H.

Т-ма H хилбертово $\Rightarrow \exists$ ортонормиран базис.

д-во:

S_0 ортонорм. множ.

$\mathcal{P} = \{S : S$ ортон. множ., $S \supset S_0\}$

$\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ е верига $\Rightarrow S = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha \in \mathcal{P}$ ← (S е мажоранта за веригата)

Тв. H – хилбертово

$S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ортонорм. мн-во

Тогава

S базис $\Leftrightarrow \overline{\operatorname{span}} S = H$

д-во:

$\Rightarrow$) доп., че $\overline{\operatorname{span}} S \subsetneq H \Rightarrow H = (\overline{\operatorname{span}} S) + (\overline{\operatorname{span}} S)^\perp$, $(\overline{\operatorname{span}} S)^\perp \neq \theta$

ако $e \in (\overline{\operatorname{span}} S)^\perp$, $\|e\| = 1$, то $S \cup \{e\}$ ортон.

$\Leftarrow$) ~~ако~~ доп., че S не е базис

$S \cup \{e\}$ ортон.

$\langle s, e \rangle = 0 \quad \forall s \in S$

$\langle s, e \rangle = 0 \quad \forall s \in \overline{\operatorname{span}} S$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt$ → ор. базис в $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{K})$

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}\right\}_{-\infty}^{+\infty}$

Т-ма | (Р.с. за хилберт. пр)

Н - Т-ма Н е сепарабелно хилбертово пр-во

⇒ Н има изброима ортонормирана база $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ и за $\forall x \in H$

$\dim H = \infty$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$$

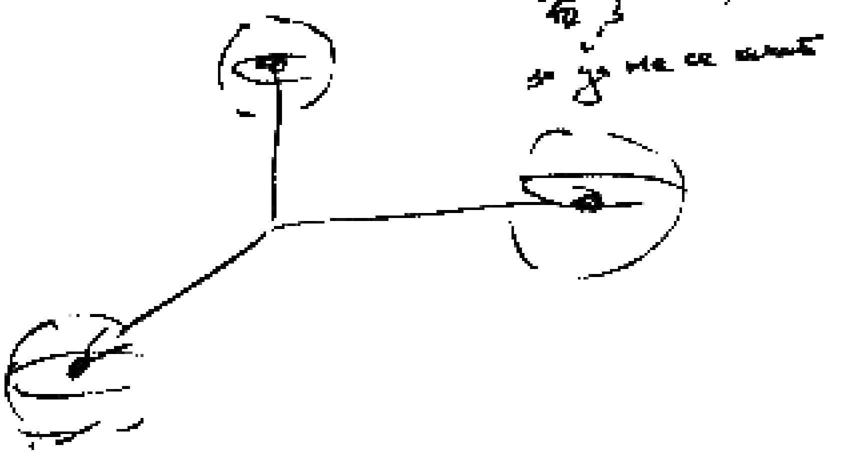
коеф. на Фурие

$\overline{Y} = X$

(X, d) се нарича сепарабелно, ако има $Y \subset X$, Y гъсто в X и Y - изброимо

$B_{\frac{\sqrt{2}}{3}}(e_\alpha)$

⇒ не се сечт



д-во:

$\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$

$\|e_\alpha - e_\beta\|^2 = \|e_\alpha\|^2 + \|e_\beta\|^2 = 2$

$\|e_\alpha - e_\beta\| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow I$ - изброимо

$\{e_1, e_2, \dots, e_i, \dots\}$

$x \in H, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i\| = dist(x, span\{e_1, e_2, \dots, e_n\})$

$c_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1,n}$ $\quad \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$

$$\|\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$$

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\|^2 = \langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i - \sum_{i=1}^{n} (c_i - \langle x, e_i \rangle) e_i, \; x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i - \sum_{i=1}^{n} (c_i - \langle x, e_i\rangle) e_i \rangle =$$

$$= \langle x, x\rangle - \sum_{i=1}^{n} \cancel{\langle x, e_i\rangle \langle e_i, x\rangle} - \sum_{i=1}^{n} \cancel{(c_i - \langle x, e_i\rangle)\langle e_i, x\rangle} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle x, e_i\rangle} \cdot \langle x, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} \cancel{|\langle x, e_i\rangle|^2} + \sum_{i=1}^{n} \cancel{(c_i - \langle x, e_i\rangle)\overline{\langle x, e_i\rangle}} -$$

хилбертово пр-во

$$y - \sum_{i=1}^{n} \cancel{(\overline{c_i - \langle x, e_i\rangle})\langle x, e_i\rangle} + \sum_{i=1}^{n} \cancel{\langle x, e_i\rangle (\overline{c_i - \langle x, e_i\rangle})} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} |c_i - \langle x, e_i\rangle|^2 =$$

$$= \langle x, x\rangle - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{n} |c_i - \langle x, e_i\rangle|^2$$

Задача

$$\Rightarrow \operatorname{dist}(x, \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}) = \langle x, x\rangle - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

и равенство се достига за $c_i = \langle x, e_i\rangle$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i \overset{?}{=} x$$

$\overline{\operatorname{span}\{e_i\}_{i=1}^{\infty}} = H$

$\varepsilon > 0$

$B_\varepsilon(x)$

$n_0 \in \mathbb{N}$, $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{n_0}\} \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$

$n \geq n_0$

$$\operatorname{dist}(x, \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}) = \|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i\| \leq$$

$$\leq \operatorname{dist}(x, \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{n_0}\}) < \varepsilon$$

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \blacksquare$$

Тв H безкрайномерно сеп. хилб. пр-во

$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ортонормирано мн-во в H.

Тогава:

H - хилбертово пр...

$J: H \to H^*$ ... $\forall x \in H$ (произв. ... ... условна) ... линейно)

(а) $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \|x^*\|^2$ (нер-во на Бесел)

(б) Ако $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ базис, то $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$ (Parseval)

(в) Ако $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$ $\forall x \in H$, то $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ базис

ако не е базис, $e \in H$, $\|e\| = 1$, $\langle e, e_i\rangle = 0$ $\forall i$ $! = 0$

$\Rightarrow \operatorname{dist}(x, \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 = 0$

<u>Т-ма</u> H безкрайномерно сепарабелно хилбертово

$\Rightarrow \exists\ T: H \to \ell_2$ линейна биекция, изометрия

$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ <u>ортонорм. базис на H</u>

$x \in H \mapsto T(x) = (\langle x, e_i\rangle)_{i=1}^{\infty} \in \ell_2$ (Parseval)

$\|T(x)\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2} = \|x\|$ $\Rightarrow$ е изометрия

$\Rightarrow T$ е инекция (иначе щеше да изпр. 2 неща в нулата)

$(c_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_2$

$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$, сх-ща, $x \in H$

(да покажем, че е сх. → Коши)

$\|\sum_{i=n+1}^{n+p} c_i e_i\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+p} |c_i|^2$ $\quad \langle x, e_i\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \sum_{j=1}^{n} c_j e_j, e_i\rangle$ i-фикс.

$= \lim c_i = c_i$

$(c_i)_{i=1}^{\infty} = T(x)$

Т-ма Γ - множество

Н-к $\quad \ell_2(\Gamma) = \{x : \Gamma \to \mathbb{C} : \sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|^2 < \infty\}$

(ІК)

ру. са на листа в удобна място

Те $\quad \sum_{\gamma\in\Gamma} |x(\gamma)|^2 = \sup \{ \sum_{\gamma \in \Gamma'} |x(\gamma)|^2 : \Gamma' \subset \Gamma,\ \Gamma' \text{ крайно} \}$

ТЧ $\quad \{\gamma : x(\gamma) \neq 0\}$ е най-много изброимо

$$\langle x, y\rangle = \sum_{\gamma\in\Gamma} x(\gamma) y(\gamma)$$

$$e_\gamma(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{ако } \alpha = \gamma \\ 0, & \text{ако } \alpha \neq \gamma \end{cases} \qquad \{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$$

съпоставяне на функции

10.11.17г.

$X^* = \{ f \in \bar{X}^* : f \text{ непрекъснато} \}$ $\quad$ окрайно спрегнато на Банахово

X бан. простр. (нормирано)

X^* алг. спрегнато

$\|f\|_* := \sup \{ |f(x)| : \|x\| \leq 1 \}$

1) $x \in X \longrightarrow \exists f \in X^*, \|f\|_* = 1,\ f(x) = \|x\|$

2) X^* разделя точките на X $(\forall x, y \in X, x \neq y\ \exists f \in X^*,\ f(x) \neq f(y))$

3) $i : X \longrightarrow X^{**} = (X^*)^*$

$i(x)(f) = f(x)$ $\quad$ $\|x\| = \|i(x)\|_{**}$

$f \in X^*$ $\quad$ линейна изометрия

Пространството на X се нарича <u>рефлексивно</u>, ако $X^{**} = i(X)$

$$i(X) = \hat{X}$$

Т-ма (Рис за хилберт. пр)

H - хилбертово пр-во

$\mathcal{J} : H \longrightarrow H^*$

$\mathcal{J}(y)(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in H$ (проблем да док., че е непр. лин. ф-ционал)

$\mathcal{J}$ е биекция и изометрия (в комплексни случай не е линейно)

($\mathcal{J}$ е спрегнато линейно)

Д-во:

$\mathcal{J}(y) \in H^*$ -> (че е лин. изоб. ф скаларите е ясно)

$|\mathcal{J}(y)(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ -> ограничен

$\Rightarrow \mathcal{J}(y) \in H^*$ е непр. функционал и $\|\mathcal{J}(y)\|_{H^*} \leq \|y\|$

$|\mathcal{J}(y)(y)| = |\langle y, y\rangle| = \|y\|^2 \Rightarrow \|\mathcal{J}(y)\|_{H^*} \geq \|y\|$ } => $\mathcal{J}$ е изометрия

$y = \theta \Leftrightarrow \mathcal{J}(y) = \theta$ => е и инекция

остава да проверим и че е сюрекция, т.е. $\forall$ функц. се получава с скалар

$f \in H^*$ Ако $f \equiv \theta$, то $f(x) = \langle x, \theta \rangle$

$L = \operatorname{Ker} f$ $f \neq \theta$, то хиперравнина

$\operatorname{codim} L = 1$ -> защото е функционал

$\dim(H/L) = 1 \Rightarrow \dim L^{\perp} = 1$

Ако $\dim L^{\perp} > 1$, то $\exists y_1, y_2 \in L^{\perp}$, $y_1 \perp y_2$, $y_1 \neq \theta, y_2 \neq \theta$ => искаме да док., че кенз две зависими

$\alpha y_1 + \beta y_2 = \theta$

$\alpha [y_1] + \beta [y_2] = \theta$

$[y_1] = \lambda [y_2] \quad [\underbrace{y_1 - \lambda y_2}_{\in L}] = [\theta]$

$y_1 - \lambda y_2 = z$, $z \in L$ / y_1

$\langle y_1, y_2 \rangle = 0$ => дежа вю ?!?

$L^{\perp} = span\{\hat{y}\}$

$\hat{y} \neq \theta$, $\hat{y} \in H$

имаме f

$g(x) = \langle x, \hat{y} \rangle$

$\ker g(x)$ са тези, които са $\perp \hat{y}$

$\ker f = \ker g = L$ (като имаме 2 ф-ции с еднакво ядро, то те са пропорционални)

$(L^{\perp})^{\perp} = L$

$y := \bar{\lambda}\hat{y} \Rightarrow f(x) = \lambda g(x) = \lambda \langle x, \hat{y} \rangle = \langle x, \bar{\lambda}\hat{y} \rangle = \langle x, y \rangle \; \forall x \in H$

$f = J(y)$ ∎

<u>Пример:</u>

$c_0^* \cong l_1$

$(y_i)_i \in l_1 \longmapsto f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$

$\sum |y_i| < \infty$ $x \in c_0$ да проверим, че редът е сходящ

$|f_y(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i||y_i| \leq \|x\|_{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |y_i| = \|x\|_{\infty} \cdot \|y\|_1 \Rightarrow$ сходящ

$x = (x_i)_i$ $x \in c_0$ $\boxed{\|f_y\|_{c_0^*} \leq \|y\|_1}$ (*)

Сега и обратното, $\forall$ ел-т в c_0^* се представя по този начин и $= \dots$

$f \in c_0^*$

$e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (n-то място)

$y_i = f(e_i),\ i = 1, 2, \dots$

$\Rightarrow f = f_y$, т.е. $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$

$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$

$x \in c_0$

$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ (нормата на остатъка е малка)

$\Rightarrow$ имаме сюрекция; $\forall$ ел. от c_0^* има такова представяне

$z_n = \sum_{i=1}^{n} e^{-i \arg y_i} \cdot e_i$ $\qquad f(z_n) = \sum_{i=1}^{n} e^{-i\arg y_i} \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} |y_i|$

$(\operatorname{sgn} y_i)$

има ли горна т.гр?

$\|z_n\|_\infty = 1$

$\sum_{i=1}^{n} |y_i| = |f(z_n)| \le \|f\|_{c_0^*} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|$ е сходящ, т.е. $y \in \ell_1$

$\boxed{\|y\|_1 \le \|f\|_{c_0^*}}$ $(**)$

От $(*)$ и $(**)$ $\Rightarrow \|y\|_1 = \|f\|_{c_0^*}$

За упр.! $\ell_1^* = \ell_\infty$

X бан. простр.

$Y \subset X$

подпр-во

$Y^\perp := \{ f \in X^* : f(x) = 0\ \forall x \in Y \}$.

$Z \subset X^*$ $\qquad$ – анихилатор

$Z_\perp := \{ x \in X : f(x) = 0\ \forall f \in Z \}$

съвпадува се с кинд

Th | X е банахово пр-во, Y е затворено подпр-во

$$\Rightarrow (X/Y)^* \overset{\text{, линейна изометрия}}{\sim} Y^\perp$$

$$Y^* \sim X^*/_{Y^\perp}$$

д-во:

$\delta : Y^\perp \to (X/Y)^*$

$\delta(f)([x]) := f(x)$

~~така да бъл~~

→ коректност : ~~x~~ $x_1 - x_2 \in Y$ (дали, ако вземем друг ел-т, то пр е едно и също)

$0 = \underbrace{f(x_1 - x_2)}_{f \in Y^\perp} = f(x_1) - f(x_2)$

→ $g \in (X/Y)^*$ (сега да намерим ел-т от $Y^\perp$)

$f(x) := g([x])$

$f \in X^*$

$x \in Y \Rightarrow [x] = [\theta] \Rightarrow g([x]) = 0$

$\Rightarrow f \in Y^\perp$

? $\delta(f) = g$, действащо върху $[x]$

$\delta(f)([x]) = f(x) = g([x])$ ⇒ е сюрекция

→ изометрия

$\| \delta(f) \|_* = \sup \{ |\delta(f)([x])| : \overset{\nearrow \text{фактор}}{|||[x]|||} < 1 \} =$

$= \sup \{ |f(x)| : |||[x]||| < 1 \} = \sup \{ |f(x)| : \|x\| < 1 \} = \|f\|_*$

⇒ δ - изометрия

⇒ инекция

(край първа част)

$|||[x]||| = \inf \{ \|y\| : y \in [x] \} < 1$

$y \in [x]$, $\|y\| < 1$

$f(y) = f(x)$

:)

$\sigma : Y^* \longrightarrow X^*/Y^\perp$ (→ лин. непр. функционал)

$\sigma(y^*) = \{$ всички продължения на y^* до лин. непр. ф-я в/у $X\} \in X^*/Y^\perp$ — тъждествено е ...

$x^* \in X^*,\ x^*|_Y = y^*$

$x_1^*, x_2^* \in X^*$

$x_1^* - x_2^* \in Y^\perp$

$(x_1^* - x_2^*)|_Y \equiv \theta \Rightarrow x_1^*|_Y = x_2^*|_Y$ ⇒ инективна е ...

— изометрия

$|||\sigma(y^*)||| = \inf\{\|x^*\| : x^* \in X^*,\ x^*|_Y = y^*\}$

$|||\sigma(y^*)||| \geq \|y^*\|$

$y^* \in Y^* \Rightarrow \exists\, x^* \in X^*,\ x^*|_Y = y^*,\ \|x^*\| = \|y^*\| \Rightarrow |||\sigma(y^*)||| = \|y^*\|$ •

(X, d) – метрично пр-во

1) $A \subset X$ се нарича никъде не гъсто, ако $\bar{A}$ има празна вътрешност.

2) $A \subset X$ се нарича мн-во от I категория по Бер, ако $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n са никъде не гъсто $\forall n$.

3) $A \subset X$ — — — II категория по Бер, ако не е от I кат.

4) $A \subset X$ резидуално, ако $X \setminus A$ е от I категория по Бер.

Т-ма 1 (Бер)
Ако (X, d) е пълно, то X е от II категория.

Следств. (X, d) е пълно и $U \subset X$ е отворено непразно, то U не е от I категория. / (X,d) пълно $U_n \subset X$ отв. гъсто $\forall n \in \mathbb{N}$ ⇒ $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ е гъсто в X

д-во:

(X, d) - пълно

$\emptyset \neq U \subset X$

U - отворено

док., че $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\operatorname{int}(\overline{A_n}) = \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$x_1 \in \underbrace{U \setminus \overline{A_1}}_{\text{отв}} \neq \emptyset$ (U отв, $\overline{A_1}$ затв)

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < 1$, $B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset U \setminus \overline{A_1}$

A_1 - изпускаме го

A_2 - изпускаме го, но се ощ в по-плътно сито

и т.н., както реша

когато $r \to 0$

$B_1 := \overline{B_{\varepsilon_1}(x)}$ $\quad x_2 \in \underbrace{B_{\varepsilon_1}(x) \setminus \overline{A_2}}_{\text{отв}} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$, $\overline{B_{\varepsilon_2}(x_2)} \subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \setminus \overline{A_2} \subset B_1 \setminus \overline{A_2}$

$B_2 := \overline{B_{\varepsilon_2}(x_2)}$

— — —

$B_1 \supset B_2 \supset \dots$

$B_n = \overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)}$, $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}$

$B_n \cap \overline{A_n} = \emptyset$

$\{x_n\}_1^{\infty}$ (р-ята от центровете на кълбата) е фундаментална, (X, d) пълно $\quad \tilde{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon_n < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$

~~[illegible]~~

понеже $\forall$ са вложени едно в друго, то сме сиг., че

$\{x_{n+p} : p \geq 1\} \subset B_n$ затворено

$\Rightarrow \tilde{x} \in B_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\tilde{x} \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subset U$

$\tilde{x} \in \lim$

$\left. B_n \cap \bar{A}_n = \emptyset \right\} \Rightarrow \tilde{x} \notin \bar{A}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\tilde{x} \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = U \qquad ?!?$

X, Y топ. простр. (метрични)

$\varphi : X \longrightarrow Y$

φ се нарича отворено изображение, ако $\varphi(U)$ е отворено в Y за $\forall U$ отворено в X.

X, Y – банахови пр-ва

$T : X \to Y$ линеен оператор

Ако T е отворено, то T е сюрекция

$T(0_X) = 0_Y$

$0_Y \in T(B_X) \Rightarrow$ отв. в $Y \Rightarrow \delta . B_Y \underset{\delta>0}{\subset} T(B_X)$

↳ като умножаваме по const, то получаваме всичко

Теорема на Банах за отвореното изображение:

X, Y – банахови пр-ва

$T \in \mathcal{B}(X, Y)$, T сюрекция

$\Rightarrow T$ е отворено изображение.

Д-во:

T отворен $\Leftrightarrow T(B_X) \supset \delta B_Y$ за някакво $\delta > 0$

U отв. в X

$y \in T(U) \Rightarrow y = Tx$ за някое $x \in U$ отв.

$U \supset B_\varepsilon(x)$

$T(U) \supset T(B_\varepsilon(x)) = T(x+\varepsilon . B_X)$

$= Tx + \varepsilon T(B_X) = y + \varepsilon T(B_X) \supset y + \varepsilon\delta . B_Y = B_{\delta.\varepsilon}(y)$

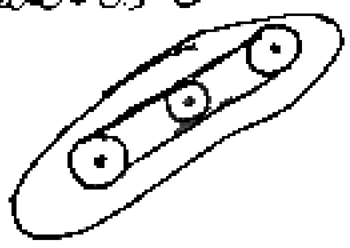
$Y = T(X) = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} n B_X\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nB_X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n . T(B_X)$

(Y-пълно, т.ма на Бер: кояа как да сас празна вътрешност)

Y пълно, Бер $\Rightarrow \exists n,\ \mathrm{int}(\overline{nT(B_X)}) \neq \emptyset$

$\overline{T(nB_X)} = n . \overline{T(B_X)}$

$\Rightarrow \mathrm{int}(\overline{T(B_X)}) \neq \emptyset$



$\Rightarrow \exists \delta > 0,\ \delta . B_Y \subset \overline{T(B_X)}$

$\overline{T(B_X)}$ изпъкнало и симетрично

$y_0 = Tx$

$-y_0 = T(-x)$

$y_1 = T(x_1)$

$y_2 = T(x_2)$

$\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 = T(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$

$\lambda \in (0,1)$

$\overline{T(B_X)}$ - изп

$T(B_X) \ni y_n^1 \xrightarrow[n]{} y^1$

$T(B_X) \ni y_n^2 \longrightarrow y^2$

$\underbrace{\lambda y_n^1 + (1-\lambda) y_n^2}_{\in T(B_X)} \longrightarrow \lambda y^1 + (1-\lambda) y^2 \in \overline{T(B_X)}$

~~[illegible]~~ Щом вътрешността не е празна, то

$y_0 + \delta B_Y \subset \overline{T(B_X)}$

$-y_0 + \delta B_Y \subset \overline{T(B_X)}$

$\Rightarrow \delta B_Y \subset \overline{T(B_X)}$

$y \in \delta B_Y \Rightarrow y = \frac{1}{2}(y_0 + y) + \frac{1}{2}(-y_0 + y) \in \overline{T(B_X)}$

$y_0 + y \in y_0 + \delta B_Y \in \overline{T(B_X)}$ / $-y_0 + y \in y_0 + \delta B_Y \in \overline{T(B_Y)}$

24

17.11.17 1

Т. про відкр. відобр.

X, Y – банахові просір.

$T \in \mathcal{B}(X,Y)$, T – сюр'єкція

Тоді T є відкрите відобр., т.е. TU відкр. в Y, за $\forall U$ відкр. в X

T відкр. відобр. $\Leftrightarrow T(B_X) \supset \delta B_Y,\ \delta > 0$

$T(B_X) \supset \delta B_Y$

(Умова)

Лема 1

X – банахов, Y норм., $T \in \mathcal{B}(X,Y)$

$\overline{T(B_X)} \supset \delta B_Y$

Тоді $T(B_X) \supset \delta_0 B_Y$.

Док-во:

$z \in \delta B_Y \qquad \|z\|_Y < \delta(1-\varepsilon)$

$y = \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot z \qquad 0 < \varepsilon < 1$

$\|y\|_Y = \frac{1}{1-\varepsilon} \|z\|_Y < \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \delta(1-\varepsilon) = \delta$

$y_1 \in T(B_X),\ \|y_1 - y\| < \delta \cdot \varepsilon$

$\Rightarrow \exists x_1 \in B_X,\ T(x_1) = y_1$

$y - y_1 \in \varepsilon \cdot B_Y \subset \varepsilon \cdot \overline{T(B_X)} = \overline{T(\varepsilon B_X)}$

$y \in T(x_1) + \overline{T(\varepsilon B_X)} = \overline{T(x_1 + \varepsilon B_X)} = \overline{T(B_\varepsilon(x_1))}$

$y_2 \in T(B_\varepsilon(x_1))$

$\|y_2 - y\| < \delta \cdot \varepsilon^2$

$x_2 \in B_\varepsilon(x_1),\ y_2 = T(x_2)$

... $\stackrel{def}{\Leftarrow}$, $\bar{A}$-компакт

$y \in y_2 + \varepsilon^2 \overline{T(B_X)} = \overline{T(B_{\varepsilon^2}(x_2))}$

$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \in Y$

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in X$

$T(x_n) = y_n$

$\|y - y_n\|_Y < \delta \cdot \varepsilon^n$

$x_n \in B_{\varepsilon^{n-1}}(x_{n-1})$

{ р-цата е фундаментална, защо разстоянията се мажорират от геом. прогресия. }

$\|x_n - x_{n-1}\|_X < \varepsilon^{n-1}$ $\qquad x_0 = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - x_{n-1}\|$ сходящ

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментална $\Rightarrow \exists\ \hat{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$

$$T(\hat{x}) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) \underset{T \text{ непр.}}{=} \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

$$\|\hat{x}\|_X = \lim_{N\to\infty} \|x_N\|_X = \lim \|\sum_{n=1}^{N} (x_n - x_{n-1})\|_X \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \|x_n - x_{n-1}\|_X \leq$$

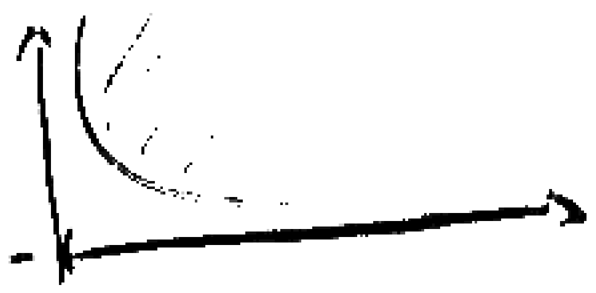
$$\leq 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots = \frac{1}{1-\varepsilon}$$

$y \in T\left(\frac{1}{1-\varepsilon} B_X\right)$

$\frac{1}{1-\varepsilon} \cdot z \in \frac{1}{1-\varepsilon} T(B_X) \Rightarrow z \in T(B_X)$ (лема)

и с тази лема доказахме т-мата за о.в. изоб.!

Т-ма 3 (Принцип за отворените изображения)



Следствие 1

X, Y банахови пространства

$T : X \to Y$

$T \in \mathcal{B}(X, Y)$

Тогава T^{-1} е непрекъснат

$(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ отв в Y, $\forall U$ отв в X

Следствие 1 (т-ма за затв. графика)

X, Y - банахови пр-ва

линеен оператор м/у тях $T : X \to Y$

$G_r T := \{(x, Tx) \in X \times Y : x \in X\}$

Тогава

T-непр. $\iff$ $G_r T$ е затворена в $X \times Y$

$(x_n, y_n) \in G_r T$ и $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$

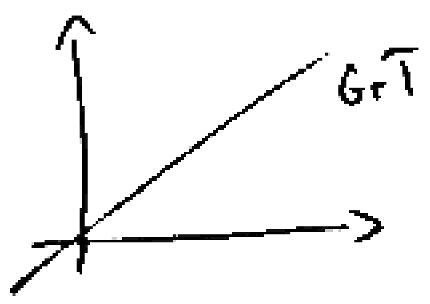
$\overline{}$

(x_n, Tx_n) ; $x_n \to x_0$ $\quad Tx_n \to Tx_0$

графиката е линейно подпр-во на $X \times Y$

д-во:

T линеен $G_r T$ лин. подпр. на $X \times Y$



$p(x,y) = x$, $p : X \times Y \to X$

$q(x,y) = y$, $q : X \times Y \to Y$

$\circ \, \mathbb{R}^k$ $\quad$ A предкомпакт $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\bar{A}$-компакт

Следств. $\|(x,y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$ (непр. изобр.)

$\Rightarrow$ $X\times Y$ е банахово, защото е лин. затв. подпр. на банахово

X, T $\quad$ $p\big|_{G_rT} : G_rT \xrightarrow{?} X$

Тогава сюрекция, инекция $\Rightarrow$ биекция

Д-во: $p(x, Tx) = p(y, Ty)$

$[x]$ $\quad$ G_rT банахово пр. $\Rightarrow$ $\left(p\big|_{G_rT}\right)^{-1}$ е непр.

$\hat{T}$ $\quad$ $x \xrightarrow{(p|_{G_rT})^{-1}} (x, Tx) \xrightarrow{q} Tx$

$\hat{T}$ $\quad$ $T = q\circ\left(p\big|_{G_rT}\right)^{-1}$ ∎

$x_1,$

H хилбертово

$T: H \longrightarrow H$ линеен оператор

T самоспрегнат, ако $\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle \ \forall x,y \in H$

(обобщението на симетр. м-ци)

T самоспрегнат $\Rightarrow$ T непрекъснат

Д-во:

$\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset G_rT$

$(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_0, y_0)$

$\langle z, y_0\rangle = \langle z, \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle z, Tx_n\rangle =$

T-ма

$= \lim\limits_{n\to\infty} \langle Tz, x_n\rangle = \langle Tz, x_0\rangle = \langle z, Tx_0\rangle$

$\langle z, y_0\rangle = \langle z, Tx_0\rangle \ \forall z \in H \Rightarrow y_0 = Tx_0$

тно в $\mathbb{R}^k$ | А предположим, че $\overset{def}{\bar{A}}$ компакт., по Бол.)

Следствие 1

X, Y банахови простр. $\ker T = \{x \in X : T(x) = 0_Y\}$

$T \in \mathcal{B}(X,Y)$, T- сюрекция

Тогава $X/\ker T$ е линейно изоморфно на Y.

д-во:

$[x] \in X/\ker T$

$\hat{T}([x]) = Tx$

$\hat{T} : X/\ker T \longrightarrow Y$, банахово, биекция

$x_1, x_2 \in [x]$

$x_1 - x_2 \in \ker T \Rightarrow Tx_1 = Tx_2$

$|||[x]||| = \inf\{\|y\| : y \in x + \ker T\} = dist(x, \ker T) = dist([x], \theta)$

$|||[x_n]||| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$y_n \in [x_n]$, $\|y_n\| < |||[x_n]||| + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\hat{T}([x_n]) = Ty_n \longrightarrow \theta_Y$

$\hat{T}^{-1}(y) = [x]$

$\hat{T}^{-1}(Tx) = [x]$

$\boxed{dist(x, \ker T) \le \|\hat{T}^{-1}\| . \|Tx\|_Y}$ ■

T-ма (Banach - Steinhaus)

X банахово, Y-нормирано

$\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X,Y)$

$\mathcal{F}$ поточково ограничено, т.е. за $\forall x \in X$ мн. $\{T(x) : T \in \mathcal{F}\}$ е ограничено в Y. Тогава $\mathcal{F}$ е равномерно ограничено, т.е. $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$ е огр.

$\| A$ предкомпакт $\Leftrightarrow \bar{A}$ компакт

Следствие | X - банахово, Y - нормировано

$\|Tx\| \le \|T\|\cdot\|x\| \le \|T\|$, $x \in B_X$

д-во.

$\{x \in X : \|T(x)\| \le n \ \ \forall T \in \mathcal{F}\} \subset X$

$\| N_n \qquad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$

N_n замк. $\quad \{x_m\} \subset N_n$, $x_m \to x_0$

$T \in \mathcal{F}$

$Tx_m \to Tx_0$

$\|Tx_m\| \le n \Rightarrow \|Tx_0\| \le n$

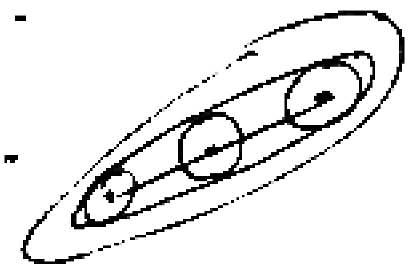
N_n замкнено

N_n симетрично, N_n випукло

$x, y \in N_n$, $\lambda \in (0,1)$, $T \in \mathcal{F}$

$\|T(\lambda x + (1-\lambda)y)\| = \|\lambda Tx + (1-\lambda)Ty\| \le \lambda n + (1-\lambda)n = n$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, int $N_{n_0} \ne \emptyset$



(1)

$x_0 + \delta B_X \subset N_{n_0}$

$-x_0 + \delta B_X \subset N_{n_0}$ (сим.)

$x = \frac{1}{2}(x_0 + x) + \frac{1}{2}(-x_0 + x)$

$\Rightarrow \delta B_X \subset N_{n_0}$

$\forall x \in \delta B_X \ \forall T \in \mathcal{F} : \|Tx\| \le n_0$

$\forall y \in B_X \ \forall T \in \mathcal{F} : \|Ty\| = \frac{1}{\delta}\|T(\delta y)\| \le \frac{1}{\delta} \cdot n_0$

$\Rightarrow \|T\| \le \frac{n_0}{\delta} \ \ \forall T \in \mathcal{F}$ ■

. в $\mathbb{R}^k$ | (A предкомпакт $\overset{def}{\iff}$ $\bar{A}$ компакт-но-во)

<u>Следствие</u> | X - банахово, Y - нормирано

$\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X,Y)$

$\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ сх. в Y $\forall x \in X$

$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$

$\Rightarrow$ T е непрекъснат лин. оператор и $\|T\| \le \liminf \|T_n\|$

<u>д-во:</u>

T - линейно

$\mathcal{F} = \{T_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ огр.

$c = \liminf \|T_n\| < \infty$

$\|x\| \le 1$

$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| = \liminf \|T_n x\| \le \liminf \|T_n\| \cdot \|x\| \le c\|x\|$

$\Rightarrow \|T\| \le c$ ■

X линейно простр., базис на Хамел, $\dim X = \infty$

<u>Тв</u> | X банахово $\Rightarrow$ Всеки базис на Хамел е неизброим.

<u>док-во:</u>

допускаме противното

$\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ базис на Хамел за X

$E_n = span\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

затв. крайномерно

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$

$int(E_{n_0}) \neq \emptyset$ (пак картинка (1))

E_{n_0} изп. симетр $\Rightarrow E_{n_0} \supset \delta B_X$

$\Rightarrow X = E_{n_0}$ ■

$\in \mathbb{R}^n$ | A управляемо ... $\bar{A}$ компакт ... не бол)

$\boxed{\text{Зад.}}$

$f \in C^{\infty}([0,1],\mathbb{R})$

$\forall x \in [0,1]\ \exists n(x) \in \mathbb{N} : f^{(n(x))}(x) = 0$

$\Rightarrow f$ е полином

$E_n = \{x \in [0,1] : f^{(n)}(x) = 0\}$ затворени

$[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

II I_1 отв. интервал ($\subset [0,1]$) максимален

$f|_{I_1}$ е полином

I_2 - отв. макс. ...

$\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$ гъсто

$I_{m_1} \cap I_{m_2} = \emptyset \ \forall m_1 \neq m_2$

$H = [0,1] \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_m\right)$

затворено множество

H няма изолирани точки

$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap H)$

J отворен интервал и $n_0 \in \mathbb{N}$

$\emptyset \neq J \cap H \subset E_{n_0}$

$x \in H \cap (a,b) \Rightarrow f^{(n_0)}(x) = 0$

$\Rightarrow f^{(n)}(x) = 0 \ \forall n \geq n_0$

$x = \lim_{n \to \infty} x_n$

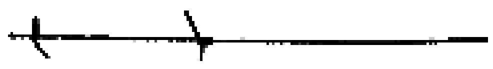
$x_n \in J \cap H$

$|y_n - x| < |x - x_n|$

$f^{(n_0+1)}(y_n) = 0 \Rightarrow f^{(n_0+1)}(x) = 0$

$\exists I_s \subset (a,b)$ $\quad m_s \in \mathbb{N},\ f^{(m_s)} = 0$ в I_s

$f^{(n_0)} = 0$ в I_s



$m_s \le n_0$ ок. ✓

ако $m_s > n_0$ ....

Компактност в метрични пр-ва

(M,d) метрично пр-во

$A \subset M$

$F \subset M$ се нарича ε-мрежа за A, ако $A \subset \bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x)$

$A \subset M$ се нарича напълно ограничено, ако A има крайна ε-мрежа за $\forall \varepsilon > 0$.

Тв| $K \subset (M,d)$

K напълно ограничена $\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K : \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Твърдим, че K е напълно ограничена $\Leftrightarrow$ има фундаментална подредица

> Заб| Ако A има крайна ε-мрежа $F \subset M$, то A има крайна 2ε-мрежа, която се съд. в A :)

док-во:

$\Leftarrow$) доп., че K не е напълно огр. $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$, K няма крайна ε_0-мрежа

$x_1,\ x_2 \notin B_{\varepsilon_0}(x_1),\ x_2 \in K$

$x_3 \in K,\ x_3 \notin \bigcup_{i=1}^{2} B_{\varepsilon_0}(x_i)$

$\vdots \qquad x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} B_{\varepsilon_0}(x_i),\ x_n \in K$

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

$d(x_m, x_n) \ge \varepsilon_0 \Rightarrow$ няма начин да е фундаментална

$i=1$ ...

... ограничено в $\mathbb{R}^k$ | (A предкомпакт $\overset{def}{\iff}$ $\bar{A}$ - компакт = пр. вот)

A:

$\Rightarrow$) $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$

$\varepsilon_1 > 0 \to F_1$ крайна ε_1-мрежа за K

B_1 кълбо с радиус ε_1

$B_1 \supset \{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ подредица на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\varepsilon_2 > 0 \to F_2$ крайна ε_2-мрежа за K

$B_2 \supset \{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$ подр-ца на $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$

. . . .

$B_k \supset \{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ подр-ца на $\{x_n^{(k-1)}\}_{n=1}^{\infty}$

кълбо с рад. ε_k

$\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ подр. на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

фундаментална

$m \geq n_0$, $n \geq n_0$: $x_m^{(m)}, x_n^{(n)} \in B_{n_0}$

$d(x_m^{(m)}, x_n^{(n)}) \leq 2\varepsilon_{n_0}$ ■

(M, d) метрично простр.

$K \subset M$

def| K се нарича компакт, ако за $\forall$ $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ отв. покритие на K (U_λ отв. $\forall\lambda$ и $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \supset K$) $\exists$ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $\bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i} \supset K$.

def| За $\forall$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ $\exists$ $\{x_{n_k}\}$ сх. подредица и $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$

(K се нарича секвенциален компакт).

... $\sim$ Ч. ограничено в $\mathbb{R}^k$ | A предкомпакт $\overset{def}{\iff}$ $\bar{A}$ компакт
. . . . б. пр. бот)

A={ <u>Т-ма</u> (M, d) пълно метр. пр-во: $K \subset M$

TFAE:

(а) K е компакт

(б) K е секвенциален компакт

(в) K е напълно огр. и затв.

<u>д-во:</u>

(б) $\Rightarrow$ (в) $\quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K \to$ сх. подр. $\Rightarrow$ фунд. подр. $\Rightarrow$ напълно огр.

$K \supset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \quad \Rightarrow x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$

(в) $\to$ (б) $\quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ напълно огр.

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментална подр-ца

M-пълно $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} \in K$ от затворено

(а) $\Rightarrow$ (в)

$\varepsilon > 0$

$\{B_\varepsilon(x)\}_{x\in K}$ отв. покритие на K

$\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_\varepsilon(x_i) \supset K$

$\{x_1, \ldots, x_k\}$ е крайна ε-мрежа

комп $\Rightarrow$ затв.

$x_0 \notin K$

$\forall x \in K\ \exists \varepsilon_x > 0$

такова, че $B_{\varepsilon_x}(x) \cap B_{\varepsilon_x}(x_0) = \emptyset$

$\{B_{\varepsilon_x}(x)\}_{x\in K}$ отв. покр.

$\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) \supset K \qquad \varepsilon = \min\{\varepsilon_{x_1}, \ldots, \varepsilon_{x_k}\} > 0$

$F_n = \{x_1, \dots\}$ ... $\cap \bar{F}\}$ е ограничено в $\mathbb{R}^k$ $\to 0$ | A предкомпакт. $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\bar{A}$ к... (имаме ог. пр. Бол)

$B_\varepsilon(x_0) \cap K = \emptyset$ (допълнение $\bigcap_{i=1}^{k} (M \setminus B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)) \subset M \setminus K$

$B_\varepsilon(x_0) = \bigcap_{i=1}^{k} B_{\varepsilon_i}(x_0) \subset$

(б) $\Rightarrow$ (а) лема на Хайне-Борел, т.е.

$\forall \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ отворено покритие на K

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in K \ \exists \lambda \in \Lambda, \ B_\varepsilon(x) \subset U_\lambda$.

доп. прот.

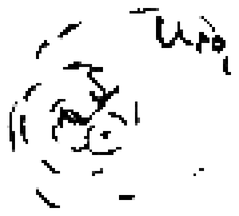
$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$

$\forall \frac{1}{n} > 0 \ \exists x_n \in K \ \forall \lambda \in \Lambda : B_{1/n}(x_n) \not\subset U_\lambda$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$

$x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0 \in K$

$x_0 \in U_{\lambda_0}$ отв. $\Rightarrow \delta > 0, B_\delta(x_0) \subset U_{\lambda_0}$
$\lambda_0 \in \Lambda$



n_{k_0} толкова голямо, че

$d(x_{n_{k_0}}, x_0) < \delta/2$

и $\frac{1}{n_{k_0}} < \delta/2$ $\quad B_{1/n_{k_0}}(x_{n_{k_0}}) \subset B_\delta(x_0) \subset U_{\lambda_0}$

?!? (др.-л.-ната на x-б)

K напълно огр. $\Rightarrow \exists F \subset K$ крайно

такова, че $\bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x) \supset K$

$B_\varepsilon(x) \subset U_{\lambda_x}$ за някое $\lambda_x \in \Lambda$

$\Rightarrow \bigcup_{x \in F} U_{\lambda_x} \supset \bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x) \supset K$.

$\Rightarrow$ намерихме крайно подпокритие. ■

Тв| Ако (M, d) метрично простр., $K \subset M$, K-компакт $\Rightarrow (K, d)$ е пълно.

д-во:

$K \supset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментална

$\tilde{\mathfrak{F}}$ е ограничено в $\mathbb{R}^k$ | A предкомпакт. ⟺ вполне огр.

$B_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, $\operatorname{diam} B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ако $x_0 \in K \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)$, то $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$

$x_0 \in B_n \Rightarrow d(x_0, x_n) \le \operatorname{diam} B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Доп., че $K \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \emptyset$

$U_n = M \setminus B_n$ отворено

$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supset K$

$\bigcup_{n=1}^{n_0} U_n \supset K \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{n_0} B_n \subset M \setminus K$

$x_{n_0} \in K$?!! ∎

Следствие

(M, d) метр. пр-во, $K \subset M$. Тогава K компакт ⟺ K секв. компакт

24.11.17г.

Арцела-Асколи

(K, d) метричен компакт

$\mathfrak{F} \subset C(K, \mathbb{R})$

Казваме, че $\mathfrak{F}$ е равностепенно непрекъснато, ако

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in \mathfrak{F}\ \forall x' \in K\ \forall x'' \in K, d(x', x'') < \delta : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Казваме, че $\mathfrak{F}$ е равномерно огр., ако е огр. в $(C(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$,

т.е. $\exists M > 0\ \forall f \in \mathfrak{F} : \|f\|_\infty \le M$

Т-ма на Арцела-Асколи

$\mathfrak{F} \subset C(K, \mathbb{R})$, K м.к. Тогава $\mathfrak{F}$ е компакт ⟺ $\mathfrak{F}$ е равност. непрекъснато и равном. огр.

~~равном. огр.~~

напълно огр. $\Rightarrow$ огр.

$\varepsilon = 1$ $\quad \{f_1, \dots, f_k\}$ крайна 1-мрежа за $\mathfrak{F}$ в $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$

$M := \max \{\|f_1\|_\infty, \dots, \|f_k\|_\infty\} + 1$ $\Rightarrow$ защото $\in$

$f \in \mathfrak{F} \Rightarrow \exists f_i, \ \|f - f_i\|_\infty < 1$

$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq \|f - f_i\|_\infty + \|f_i\|_\infty \leq M$

$\boxed{\varepsilon > 0}$

нап. огр. $\Rightarrow$ $\{f_1, \dots, f_k\}$ $\frac{\varepsilon}{3}$-мрежа за $\mathfrak{F}$

$i \in \{1, \dots, k\}$

f_i равн. непр. $\mathrm{б/у}\ K \Rightarrow \exists \delta_i > 0 \ \forall x', x'' \in K,\ d(x', x'') < \delta_i :$

$|f_i(x') - f_i(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$

$f \in \mathfrak{F},\ d(x', x'') < \delta.$

$$|f(x') - f(x'')| \leq \underbrace{|f(x') - f_i(x')|}_{\leq \|f - f_i\|_\infty} + \underbrace{|f_i(x') - f_i(x'')|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_i(x'') - f(x'')|}_{\leq \|f - f_i\|_\infty} < \varepsilon$$

$f \in \mathfrak{F} \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, k\},\ \|f - f_i\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$

$\underline{\varepsilon > 0}$ $\quad$ да използваме равном. непр. и да намерим δ

$\mathfrak{F}$ равностепенно непр. $\Rightarrow \exists \delta > 0\ \forall f \in \mathfrak{F}\ \forall x', x'' \in K,\ d(x', x'') < \delta :$

$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\left.\begin{matrix} \delta > 0 \\ K \text{ метричен компакт} \end{matrix}\right\}$ $\{x_1, \dots, x_k\} \subset K$

$\Rightarrow \delta/3$-мрежа за K

$\rightarrow$ оператор нелинеен

$\mathcal{F}(f) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k))$

$\mathcal{F} : C(K) \longrightarrow \mathbb{K}^k$

$A = \{ \mathcal{F}(f) : f \in \mathcal{F} \}$ е ограничено в $\mathbb{R}^k$

$\|\mathcal{F}(f)\|_{\infty, \mathbb{R}^k} = \|f\|_\infty$

A предкомпакт. $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\bar{A}$ компакт (там ѐ пр. босто)

$\Rightarrow$ A има $\frac{\varepsilon}{3}$-мрежа в $\mathbb{R}^k$ с центрове в A

$\{ \mathcal{F}(f_1), \dots, \mathcal{F}(f_n) \}$

$\{ f_1, f_2, \dots, f_n \} \subset \mathcal{F}$

$f \in \mathcal{F} \to \mathcal{F}(f) \in A \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\},$

$\|\mathcal{F}(f_i) - \mathcal{F}(f)\|_{\infty, \mathbb{R}^k} < \frac{\varepsilon}{3}$

$|f_i(x_j) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \; \forall j = 1, k$

Взимаме произволна точка $x \in K$

закачаме да го направим малко

$|f(x) - f_i(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f(x_j)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}, \text{защото е в семейство}} + \underbrace{|f(x_j) - f_i(x_j)|}_{\frac{\varepsilon}{3} \text{ от функцията}} + \underbrace{|f_i(x_j) - f_i(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}, \, f_i \text{ е в семейството}} < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, k\} \; \varrho(x, x_j) < \delta/3$

X, Y - нормирани оператори

$A \in \underline{\mathcal{B}(X, Y)}$

$\|A\| := \sup \{ \|Ax\|_Y : \|x\|_X \leq 1 \}$

1) Y Банахово $\Rightarrow (\mathcal{B}(X, Y), \|\cdot\|)$ пълно

2) $\operatorname{Ker} A = \{ x \in X : Ax = 0_Y \}$ затв. подпр. на X

3) $X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$ $\quad A \in \mathcal{B}(X, Y), \; B \in \mathcal{B}(Y, Z)$

$\|BA\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

$B \circ A \in \mathcal{B}(X, Z)$

$\|B \circ A\| = \sup \{ \|(B \circ A)(x)\| : \|x\|_X \leq 1 \} = \sup \{ \|B\| \cdot \|Ax\|_Y : \|x\| \leq 1 \} =$

$\|B(A(x))\|_Z \leq \|B\| \cdot \|A(x)\|_Y$ $\qquad = \|B\| \, \|A\|,$

1) shift

$S: \ell_2 \to \ell_2$

$S(x_n)_n = (0, x_1, x_2, \dots)$

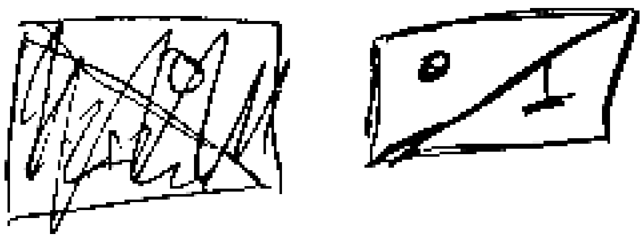
$\|S\| = 1$

2) интегрален оператор $\qquad A: C[0,1] \to C[0,1]$

$f \in C[0,1]$

$k: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

[redacted] непрекъснато



$$A(f)(t) = \int_0^1 k(t,\tau) f(\tau)\, d\tau$$

$$\|A(f)\|_\infty = \sup \left\{ \left| \int_0^1 k(t,\tau) f(\tau)\, d\tau \right| : t \in [0,1] \right\}$$

$$\left| \int_0^1 k(t,\tau) f(\tau)\, d\tau \right| \le \int_0^1 |k(t,\tau)| \cdot |f(\tau)|\, d\tau \le$$

$$\le \|f\|_\infty \cdot \int_0^1 |k(t,\tau)|\, d\tau$$

$$\|A(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty \cdot \underbrace{\sup \left\{ \int_0^1 |k(t,\tau)|\, d\tau : t \in [0,1] \right\}}_{L}$$

нормата се оценява от това число
дето е max, защото интегр непр ф-ция

$\|A\| \le L$

→ как да намерим редица, може, че функциите са постр в ℓ_2

$$\exists t_0 \in [0,1]: \; L = \int_0^1 |k(t_0,\tau)|\, d\tau \xleftarrow{n \to \infty} \int_0^1 k(t_0,\tau) f_n(\tau)\, d\tau \qquad \|f_n\|_\infty = 1$$

$g(\tau) = \mathrm{sgn}\, k(t_0, \tau)$

Компактен оператор $\quad k(X) : X \to X$

X, Y - Банахови

$A \in k(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$, ако $\overline{A(B_X)}$ е компакт в Y. (предкомпакт)

Тв (а) $k(X,Y)$ е лин. подпр. на $\mathcal{B}(X,Y)$

$A_1, A_2 \in k(X,Y)$

$(A_1 + A_2)(B_X) \subset$

$\subset \overline{A_1(B_X) + A_2(B_X)}$

компакт

(б) X, Y, Z - Банахови

$A \in \mathcal{B}(X,Y),\ B \in k(Y,Z) \Rightarrow BA \in k(X,Z)$

$A \in k(X,Y),\ B \in \mathcal{B}(Y,Z) \Rightarrow BA \in k(X,Z)$

(в) $k(X,Y)$ - затворено подмн-во на $\mathcal{B}(X,Y)$

$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{р-во}} A, \quad A_n \in k(X,Y)$

$\|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$A(B_X)$

$\varepsilon > 0$ (строим мрежа)

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \|A_{n_0} - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$A_{n_0}(B_X)$ има крайна $\frac{\varepsilon}{2}$ мрежа

$\{y_1, \dots, y_n\} \subset Y$

$y = Ax, \quad \|x\|_X \le 1$

$\|A_{n_0}x - y_i\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}, \quad i \in \{1, \dots, n\}$

$\|y - y_i\|_Y \le \|Ax - A_{n_0}x\|_Y + \|A_{n_0}x - y_i\|_Y \le \underbrace{\|A_{n_0} - A\|}_{\varepsilon/2} \overbrace{\|x\|_X}^{\le 1} + \underbrace{\|A_{n_0}x - y_i\|_X}_{\frac{\varepsilon}{2}}$

A нап. ог. $\Rightarrow \overline{A}$ напр. ог.

Спрегнат оператор

$X \xrightarrow{A} Y$

$X^* \xleftarrow{A^*} Y^*$ -> спрегнат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "\varphi\circ A"'] & Y \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

φ -> функционал

$A^*(\varphi)(x) = \varphi(Ax) \in X^*$ - линеен непр. функционал в/у X

φ - произволен ел-т на Y^*

$\|A^*\| = \sup\{\|A^*\varphi\|_{X^*} : \|\varphi\| \le 1\} =$

$= \sup\{ \sup\{|\varphi(Ax)| : \|x\| \le 1\} : \|\varphi\| \le 1\} =$

$= \sup\{ \sup\{|\varphi(Ax)| : \|\varphi\| \le 1\} : \|x\| \le 1\} =$

$= \sup\{\|Ax\| : \|x\| \le 1\} = \|A\|$

$\underline{\langle x, f\rangle}$ - скаларно в хилбертово пр-во

$x \in X$

$f \in X^*$ $\qquad \langle Ax, \varphi\rangle = \langle x, A^*\varphi\rangle$

$\boxed{01.12.17г.}$ X, Y - Банахови

$T : X \to Y$

непр.

$T \in \mathcal{B}(X,Y)$ $\qquad K(X)$ - двустранен идеал

$K(X,Y)$ - мн-вото от компактните оператори от $X \to Y$

$\cup$

$\mathcal{F}(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$

$\dim T(X) < \infty$

$(T_1 + T_2)(X) \subset T_1(X) + T_2(X)$ - лин. подпр-во

Enflo Mozer

$\overline{T(B_X)}$ ограничено (то е предкомпакт)

ако оператор може да го апроксимираме искаме си и да го ограничим => компакт (но обратното не е вярно)

$$\overline{\mathcal{F}(X,Y)} = K(X,Y) \quad (*)$$

approx. prop.

пр-ва, които имат базис на то (*) е вярно

$$X \xrightarrow{T} Y$$

$$X^* \xleftarrow[T^*]{} Y^*$$

$$(T^*\varphi)(x) := \varphi(Tx)$$

$\varphi \in Y^*$ $\qquad \|T\| = \|T^*\|$

Т-ма X, Y бан. пр-ва. Тогава $T \in K(X,Y) \iff T^* \in K(Y^*, X^*)$

док-во)

$\Rightarrow$ $\overline{T(B_X)} = K$ компакт в Y

(Трябва да док. че образът в Y^* е ~~во~~ ограничено)

$f \in \cancel{\;} T^*(B_{Y^*})$

$$\|f\|_{X^*} = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\} = \sup\{|(T^*\varphi)(x)| : x \in B_X\} =$$

Нека $f = T^*\varphi$ $\qquad = \sup\{|\varphi(Tx)| : x \in B_X\} =$

$$= \sup\{|\varphi(y)| : y \in \underbrace{T(B_X)}_{\text{обр. на ед. кълбо}}\} = \|\varphi\|_{C(K,\mathbb{R})}$$

$\mathcal{B}(X^*, Y^*)$ пълно

изометрично влагане

равном. огр. от $\|T^*\|$

равностепенно непр.

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| = |\varphi(y_1 - y_2)| \le \|\varphi\|\|y_1 - y_2\| \le \|T\|\|y_1 - y_2\|$$

тук е в ролята на общата липшицова const

... изпълнение са

X X - банахово пространство

Y - лин. подпр. на X

$P : X \to X$ проекция в/у Y

линейно

$P(X) = Y$

$Py = y \quad \forall y \in Y$

$X = Y_1 \oplus Y_2$ (директна сума)

$P_i : X \to Y_i$

$x = P_1 x + P_2 x$ (по единствен начин от единствеността на дир. сума)

$X = Y \oplus \ker P$

Казваме Y затв. подпр. на X. Казваме, че Y е допълнено, ако

$\exists P$ непр. проекция на X в/у Y (т.е. може да проектираме цялото пр-во)

Y затв. подпр. в $\overset{\text{на } X}{\vee}$, Z е тополог. допълнение на Y, ако Z е затв.

и $X = Y \oplus Z$.

ако е топол. допълнено, то е допълнено.

Ако P непр. пр. в/у Y

$Z = \ker P$ затв.

$\ker P \oplus Y = X$

$x \in \ker P \cap Y = \{\theta\}$

$x = Px = 0$

$x = Px + (x - Px)$

$P(x - Px) = Px - P^2 x = 0$

$X = Y \oplus Z$ Рим. пр-во на X в/у Y
$\ker P = Z$

крайномерните са винаги допълнени

$\operatorname{Graph} P = \{(x, Px) \in X \times X : x \in X\}$

$(x_n, Px_n) \xrightarrow{\text{a.y.e}} (x, y)$

$x_n \to x$

$x_n - Px_n \in \ker P$ затворено $\Big\} \Rightarrow x - y \in \ker P$

$x_n - Px_n \to x - y$

$x = (x-y) + y$

$Z = \ker P \quad y \in Y$

$x = (x - Px) + Px$

$x = Px + (x - Px)$

$P(x - Px) = Px - P^2x = 0$

$X = Y \oplus Z$ Рим. пр. на X в/у Y
$\ker P = Z$

$y = Px$

Тв] $Y \subset X$
$\dim Y < \infty \Rightarrow Y$ е допълнено

$Y = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$

$f_i : Y \to \mathbb{R}$

$y = \sum_{i=1}^{n} f_i(y) e_i \quad \forall y \in Y$ (можем да ги продължим, така че да си останат непр.)

$f_i \xrightarrow[\text{Х.Б.}]{} \tilde{f}_i \in X^*$

$x \in X \to Px = \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(x) e_i$

X банахово пр-во

Лема1 $T \in K(X)$, $\varepsilon > 0$

$S = Id - T$

Y затв. пр-во подпр-во на X, $Y \neq X$ и $Y \supset S(X)$

Тогава $\exists$ ел-т $x_0 \in B_X$: $dist(Tx_0, T(Y)) > 1 - \varepsilon$ (надалече от образа на Y)

д-во:

$x_0 \in B_X$, $dist(x_0, Y) > 1 - \varepsilon$

$S(x_0) = x_0 - Tx_0$

$Tx_0 = x_0 - S(x_0)$

$T(Y) = (Id - S)(Y) \subset Y - S(Y) \subset Y - S(X) \subset Y - Y = Y$

$dist(T(x_0), T(Y)) \geq dist(T(x_0), \underbrace{Y}_{\text{това е по-голямо}}) = dist(T(x_0), Y - S(x_0)) =$

~~dist(T(B_X)N~~

разстоянието до по-голямото мн-во е по-малко

$= dist(Tx_0 + Sx_0, Y) = dist(x_0, Y) > 1 - \varepsilon$ ■

Лема1 $T \in K(X)$, $S = Id - T$, $Y \supset S(X)$, $Y \neq X$, Y затв. подпр-во

$\Rightarrow \exists\ x_0 \in B_X$, $dist(Tx_0, T(Y)) > 1 - \varepsilon$

Т-ма1 $T \in K(X)$, $S = Id - T$ $\Rightarrow$ $\ker S$ е крайномерно, $S(X)$ затворено в X и е с крайна коразмерност.

д-во:

$N = \ker S$

$x - Tx = 0 \ \forall x \in N$

$T|_N \equiv id|_N$ Т е компакт. то $B_X \cap N$

$\dim N < \infty$

$X = N \oplus X_1$ $\qquad S_1 = S\big|_{X_1}$

X_1 затворено

$\inf\{\|S_1(x)\| : \|x\| = 1,\ x \in X_1\}$ (да видим, че е строго полож.)

доп., че противното, т.е. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$, $\|x_n\| = 1$

$$S_1(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$$

$T x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} Y$ (използваме компактността)

$x_{n_k} = T x_{n_k} + S_1 x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} Y$ $\qquad$ X_1 затворено

$\|y\| = 1,\ y \in X_1$

$S_1(x_{n_k}) \to S_1(y)$

$\Rightarrow S_1(y) = \theta$?!?

$c > 0 : \|S_1(x)\| \geq c\|x\| \quad \forall x \in X_1$

$S_1(X) \equiv \underline{\underline{S(X)}}$ (допълнението е 0)

товаще ни даде затвореност на $S(X)$

Взимаме ел-ти от $S(x)$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$, $\quad S_1 x_n \to y$

$\|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{c} \|S_1(x_m) - S_1(x_n)\|$

$\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фунд. $\Rightarrow x_n \to x_0 \in X_1$

$S x_n \to \boxed{S x_0 = y}$ т.е. образът е затворен

остава да срещ. че е коразмерно

$S^0 := Id$

$S^1 := S$

$S^{k+1} := S \circ S^k$, (композиране по себе си многократно)

$S^k = Id - T_k$

$T_k \in K(X)$

$S^{k+1} = (Id - T)(Id - T_k) =$

$= Id - T - T_k + T \circ T_k = Id - \underbrace{(T + T_k - T \circ T_k)}_{\text{компакт}}$

$N_k = \ker(S^k)$

$M_k = S^k(X)$

к $\uparrow$, ядрата нарастват, а образите намаляват

$N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_k \subset N_{k+1} \subset \dots$

$X \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_k \supset M_{k+1} \supset \dots$

$S(X) \subset X$ — ако в един момент стационират, то

$S^2(X) \subset S(X)$ — следващите ще са равни

да допуснем, че $X \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \dots \supsetneq M_k \supsetneq M_{k+1} \supsetneq \dots$

$\operatorname{dist}(T(x_1), T(M_1)) > \frac{1}{2}$, $\|x_1\| \le 1$

$M_1 \supsetneq M_2$ — $\|x_2\| \le 1$, $x_2 \in M_1$, $\operatorname{dist}(Tx_2, T(M_2)) > \frac{1}{2}$

$S(M_1) = M_2$ — $\|Tx_2 - Tx_1\| > \frac{1}{2}$, $x_2 \in M_1$

и т.н. за x_k

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in M_{n-1}$, $\|x_n\| \le 1$, $\|Tx_m - Tx_n\| > \frac{1}{2}$?!?, защото T са

в единичното кълбо

$\{Tx_n\} \subset T(B_X)$ значи стационира в даден момент

$\exists k: M_{k+1} = M_k$

втората стационира, сега да док. за първата

$N_{k-1} \subsetneq N_k$

$S|_{N_k} : N_k \to N_{k-1}$

$x \in N_k \qquad S^k x = \theta$

$S^{k-1}(Sx) = \theta$

$Sx \in N_{k-1}$

$x_k \in N_k$

$\|x_k\| = 1$

$\operatorname{dist}(Tx_k, T(N_{k-1})) > \frac{1}{2}$

$\{Tx_k\} \subset \underbrace{T(B_X)}_{\Rightarrow \text{ няма сходяща подр-ца}}$ отново противоречие като предишното

$n, N_n = N_{n+1}$

$p = \max\{m, n\}$

$X = N_p \oplus M_p \quad (1)$

Трябва да вземем някаво x и да се питаме дали представяме по прав начин $\quad x = \overset{\in M_p}{y} + \overset{\in N_p}{(x-y)}$

$S(X) \supset M_p$

$S^p(x) \in M_p$

~~$S^p(X) = S^p(S^p_x) \in M_{2p} = M_p$~~

$\boxed{y \in M_p,\ S^p y = S^p x}$ $\quad (S^p(y-x) = 0 \Rightarrow y - x \in N_p)$

$S^p_x = z \in M_p$

$S^p(M_p) = M_{2p} = M_p$ (защото е стационирано)

$X = N_p + M_p$

$y \in M_p \cap N_p$

$y \in M_p \Rightarrow y = S^p_x$

$S^p y = 0 \quad S^{2p} x = 0 \quad x \in N_{2p} = N_p \Rightarrow S^p x = 0, \quad M_p \cap N_p = \{\theta\}$

$y = 0 \Rightarrow$ док. (1) ∎

36

Алтернатива на Фредхолм (

X бан. пр., $T \in K(X)$, $\lambda \neq 0$ → от ЛА

Тогава

$Tx - \lambda x = 0$ има само реш. θ $\iff$ $Tx - \lambda x = y$ има реш. $\forall y \in X$

$\ker(\lambda Id - T) = \{\theta\} \iff (\lambda Id - T)(X) = X$

док-во:

$\Rightarrow$) б.о.о. $\lambda = 1$, $S = Id - T$

$N_k = \ker S^k$ → ядро

$M_k = S^k(X)$ → образ

$M_{m-1} \neq M_m = M_{m+1} = \dots$

$u \in M_{m-1} \setminus M_m$ $\quad u \neq v$

$Su \in M_m = M_{m+1} \Rightarrow \exists v \in M_m,$
$Sv = Su$

$S(v-u) = 0 \Rightarrow v - u \in \ker S = \{0\}$?!?

$\Leftarrow$) $S(X) = X$

$\exists x_1 \in X,\ x_1 \neq \theta$ и $Sx_1 = \theta$

$S(X) = X \Rightarrow \exists x_2,\ Sx_2 = x_1$

$S^2 x_2 = Sx_1 = \theta \Rightarrow x_2 \in N_2 \setminus N_1$

по-нататък по същия начин

$x_k \in N_k \setminus N_{k-1}$

$x_{k+1},\ Sx_{k+1} = x_k$

$x_{k+1} \in N_{k+1} \setminus N_k$

ако допуснем, че $\ker \neq 0$, то ще излезе, че редът расте ∞,
но ние показахме, че спира в даден момент

$x_{k+1} \in N_{k+1} \setminus N_k$

15.12.

$S = \lambda Id - T$, $T \in \mathcal{K}(X)$

$\lambda \neq 0$

$\mathrm{Ker}(\lambda Id - T)$ крайномерно

$S(X)$ затворено, с крайна коразмерност

От предишно тв. алтернативата на Фредхолм

$\mathrm{Ker}(\lambda Id - T) = \{0\} \iff (\lambda Id - T)(X) = X$

свойство за спрегнатия оператор

$\mathrm{Ker}(\lambda Id_{X^*} - T^*) = \{0\} \iff (\lambda Id_{X^*} - T^*)(X^*) = X^*$

защото X^* банахово и T^* е компактен, ...

ако $T \in \mathcal{K}(X,Y) \iff T^* \in \mathcal{K}(Y^*,X^*)$

Тв $S \in \mathcal{B}(X,Y)$ анихилатор

(а) $\mathrm{Ker}\, S = S^*(Y^*)_\perp$, $\mathrm{Ker}\, S^* = S(X)^\perp$

(б) $S(X) = (\mathrm{Ker}\, S^*)_\perp$, $S^*(Y^*) \subset (\mathrm{Ker}\, S)^\perp$

$\varphi \in \mathrm{Ker}\, S^* \iff (S^*\varphi)(x) = 0 \ \forall x \in X \iff \varphi(Sx) = 0 \ \forall x \in X \iff \varphi \in S(X)^\perp$

$x \in S^*(Y^*)_\perp \iff (S^*\varphi)(x) = 0 \ \forall \varphi \in Y^* \iff \varphi(Sx) = 0 \ \forall \varphi \in Y^* \iff Sx = 0$

$(\mathrm{Ker}\, S^*)_\perp = (S(X)^\perp)_\perp = \overline{S(X)}$

теорема за $\perp$ от ог. анихилатор

Обратими оператори

X, Y банахови пространства

$T \in \mathcal{B}(X,Y)$

T е обратим, ако T е биекция и $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$

ако имаме биекция м/у две банахови и обратното е непрекъснато [illegible] от [illegible]

ако S и T са обратими

1) $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$

2) $T \in \mathcal{B}(X,Y) \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$ [illegible]

T - обратим $\quad T^*$ обратим

$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$ спрегнатият на композицията е композицията на спрегнатите

Лема 1. X - банахово

$T \in \mathcal{B}(X)$, $\|T\| < 1$

Док. Нека $S = Id_X - T$, тогава S е обратим и

$S^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \qquad T^0 = Id$

$T^{n+1} = T^n \circ T$

$\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$

$\|T^n\| \leq \|T\|^n$

защото тоя ред $\sum \|T^n\|$ се мажорира от $\sum_{n=0} \|T\|^n$ ...

и $\sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{B}(X)$

е сход. от

Коши

$U \circ S = \left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n\right)(Id_X - T) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} T^n\right) \circ (Id_X - T) =$

$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} (T^n - T^{n+1})\right) = \lim_{N\to\infty} (Id_X - T^{N+1}) = Id_X$

$S \circ U = Id_X$

Лемма 2. X банахово, $S, T \in B(X)$, T обратим,

если $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$

$\Rightarrow$ S обратим и $\|S^{-1} - T^{-1}\| \le \frac{\|T^{-1}\|^2 \|S-T\|}{1 - \|T^{-1}\| \|S-T\|}$

Док-во $T^{-1} \circ (T-S)$

$\|T^{-1} \circ (T-S)\| \le \|T^{-1}\| \cdot \|T-S\| < 1$ из леммы 1

значит можно [illegible] по [illegible]

$\Rightarrow Id_X - T^{-1}(T-S) = Id_X - Id_X + T^{-1} S = T^{-1} S$

обратим

$\Rightarrow S$ обратим

$U = (T^{-1} S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[T^{-1} \circ (T-S)\right]^n$

$S^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[T^{-1} \circ (T-S)\right]^n \circ T^{-1}$

$\|S^{-1} - T^{-1}\| \le \|T^{-1}\| \cdot \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \left(T^{-1} \circ (T-S)\right)^n\right\| \le$

$\le \|T^{-1}\| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \|T^{-1}\|^n \cdot \|T-S\|^n = \|T^{-1}\| \left(\frac{1}{1 - \|T^{-1}\| \|T-S\|} - 1\right)$

геометрическая

прогрессия с знамен.

$$\|S^{-1}-T^{-1}\| \le \|T^{-1}\|\left(\frac{1}{1-\|T-S\|\|T^{-1}\|}-1\right) =$$

$$= \frac{\|T^{-1}\|^2\|T-S\|}{1-\|T^{-1}\|\|T-S\|}$$

Следствие $\mathcal{G}$ множество от обратимите в $B(X)$

$\Rightarrow \mathcal{G}$ е отворено в $B(X)$ и $h(T)=T^{-1}$,

$h:\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ е хомеоморфизъм

биекция между ...
X, Y топ. простр.
$h: X\to Y$
h се нарича хомеоморфизъм
ако h е биекция
и h и h^{-1} са непрекъснати.

$T\in B(X)$ над $\mathbb{K}$ $\left(\begin{smallmatrix}\mathbb{C}\\ \mathbb{R}\end{smallmatrix}\right.$

множеството $\{\lambda\in\mathbb{K} : \lambda I_X - T$ не е обратим$\}$
се нарича спектър на T

резолвента

$\rho(T) = \mathbb{K}\setminus\sigma$, $R_T(\lambda) = (\lambda I_X - T)^{-1}$, $\lambda\in\rho(T)$
рез. множество резолвента

λ - собствена стойност на T
ако $\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\ne\{0\}$ тогава не е обратим

в безкрайномерни нямаме ... T компактен
$T\in K(X) \Rightarrow 0\in\sigma(T)$

нулата е задължително от $\sigma(T)$ в спектъра, ако е безкрайномерно

Тв. $\sigma(T)$ е компактно множество, ограничено от $\|T\|$ и

ако $\sigma(T) \neq \emptyset$

$|\lambda| > \|T\|$

$(\lambda\, Id_X - T) = \lambda\left(Id_X - \frac{1}{\lambda} T\right)$ – обратим по лема 1

$\left\| \frac{1}{\lambda} T \right\| = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$

Тв. $\sigma(T) = \sigma(T^*)$ ако T е обратим и T^* има обр.

и $T \circ T^{-1} = Id_X$ и имаме, че спрегнатия $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ и

Лема $x_1, \dots, x_n$

x_i собствени вектори за T със собств. ст. λ_i

$x_i \neq 0$ $(Tx_i = \lambda_i x_i)$

$\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i \neq j$

$\Rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ ЛН

Док.

Нека предположим, че $\{x_1, \dots, x_n\}$ е ЛЗ. Нека

$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \Rightarrow Tx_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i T x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \lambda_i x_i$

$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \lambda_n x_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_n - \lambda_i) x_i = 0$, а това е невъзможно □

Пример

$X = L_2([0,1]; \mathbb{C})$

$T : X \to X$

$(Tx)(t) = t \cdot x(t)$

$t \in [0,1]$

$\|Tx\|^2 = \int_0^1 |t x(t)|^2 dt \le \int_0^1 |x(t)|^2 dt = \|x\|^2_{L_2}$

следва, че $\|T\| \le 1$ ограничен

да проверим дали T има собствени стойности?
да допуснем, че λ е собствена стойност, тогава
следва, че

$Tx = \lambda x$ $\quad t x(t) - \lambda x(t) = 0$ п.н.

$x \in L_2$ $\quad (t-\lambda) x(t) = 0$ п.н.

$x(t) = 0$ п.н. $\quad \forall t \Rightarrow$

T няма собствени стойности

$\lambda \in [0, 1]$ искаме да докажем, че λ е в спектъра

$\varepsilon > 0$, $[\lambda, \lambda+\varepsilon] \subset [0, 1]$

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, & \text{ако } t \in [\lambda, \lambda+\varepsilon] \\ 0, & \text{ако } t \notin [\lambda, \lambda+\varepsilon] \end{cases}$$

$\|x_\varepsilon\|^2 = \int_0^1 |x_\varepsilon(t)|^2 dt = \int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 dt = \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon = 1$

$$(Tx_\varepsilon)(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}, & t \in [\lambda, \lambda+\varepsilon) \\ 0, & \dots \end{cases}$$

$\|Tx_\varepsilon\|^2 = \int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} \frac{t^2}{\varepsilon} dt = \frac{1}{\varepsilon} \frac{t^3}{3} \Big|_\lambda^{\lambda+\varepsilon}$

$[(\lambda Id_x - T)x_\varepsilon]$

$(\lambda Id_X - T)(x_\varepsilon) = \lambda x_\varepsilon(t) - t x_\varepsilon(t)$

$\|(\lambda Id_X - T)(x_\varepsilon)\|^2_{L_2} = \int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda} \left|\frac{\lambda - t}{\sqrt{\varepsilon}}\right|^2 dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda} (\lambda - t)^2 dt =$

$= \frac{1}{\varepsilon}\left(-\frac{(\lambda - t)^3}{3}\right)\Big|_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\varepsilon^2$

$\|(\lambda Id_X - T)(x_\varepsilon)\|_{L_2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \Rightarrow$ [illegible] с ограничен обратен [illegible] с обратен [illegible].

ако $\lambda = 1$ [illegible] разгледай $[1-\varepsilon, 1]$

Thm Спектърът на компактен оп. се състои от собствени стойности.

$T \in \mathcal{K}(X)$ е компакт. и $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$
$\Rightarrow \lambda$ е собствена стойност.

$(\lambda Id - T)$ не е обратим. [illegible]
Ако λ не е собств. ст. $\Rightarrow Ker(\lambda Id_X - T) = \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda Id_X - T)(X) = X$

[illegible] $\Rightarrow$ [illegible] Т.обр. [illegible] обратен [illegible]

Thm X Бан. пр. $T \in \mathcal{K}(X)$, $\varepsilon > 0$
Тогава $\exists$ най-много краен брой $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \sigma(T)$
такива, че $|\lambda_i| \geq \varepsilon$

Следствие $T \in \mathcal{K}(X) \Rightarrow \sigma(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$
[illegible] $\sigma(T) \setminus \{0\}$ е крайно [illegible] [illegible]
[illegible]

Док-во от противного, т.е. есть $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots\} \subset \sigma_p$

$|\lambda_i| \geq \varepsilon$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$

x_i - собств. вектор, соотв. соб. знач. λ_i

$X_n = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

зам.

$X_n \subsetneq X_{n+1}$ $\forall n \in N$

доказали

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists y_n \in X_n,\ \|y_n\| = 1,\ \operatorname{dist}(y_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$

$z_n = \frac{1}{\lambda_n} y_n \in X_n$, тогда $\|z_n\| = \frac{1}{|\lambda_n|}\|y_n\| = \frac{1}{|\lambda_n|} \leq \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена

$T(X_n) \subset X_n$ — инвариантно, т.к. [illegible] от собств. значений

$Tz_n \in X_n$, $\underline{y_n - Tz_n \in X_{n-1}}$ — (*)

$y_n \in X_n \Rightarrow y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

$y_n - Tz_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_n} \alpha_i \lambda_i x_i = \sum \alpha_i \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right) x_i$

т.е. (*) доказано

▲

$\|T_{2_m} - T_{2_n}\|$ $\overbrace{n \geq m}$ $\geq \operatorname{dist}(T_{2_m}, X_{n+1}) =$

$(T_{2_m} \in X_m \subseteq X_{n+1})$

$= \operatorname{dist}(T_{2_m} + (y_n - T_{2_n}), X_{n+1} + (y_n - T_{2_n})) =$

$= \operatorname{dist}(y_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. $\square$

Спектри на самоспрегнати оператори

H - хилбертово пространство над $\mathbb{C}$

$J: H \to H^*$

$J(x)(y) = \langle y, x \rangle \ \forall x \in H \ \forall y \in H$

$T \in \mathcal{B}(H)$

$\langle T(x), y \rangle = \langle x, Q(y) \rangle$ за $\forall y \in H \ \forall x \in H$

$\varphi(y) = \langle Tx, y \rangle$

$\langle x, Q(\lambda y) \rangle = \langle Tx, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle Tx, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, Qy \rangle = \langle x, \lambda Q y \rangle$

$\langle Qy, Qy \rangle = \langle T(Qy), y \rangle \le \| T(Qy) \| . \| y \| \le \| T \| . \| Qy \| \| y \|$

$\| Qy \| \le \| T \| \| y \|$

$T^* = Q$ - спрегнат на T оператор

$T^d : H^* \to H^*$ - дуален на T в банаховото пространство H

$T^* x = y \iff T^d(J(x)) = J(y)$ - еквивалентност на T^* и T^d

---

$(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$ свойства на T^*

$Id_H^* = Id_H$

$(S + T)^* = S^* + T^*$

$T^{**} = T$

Факт 1. $\lambda \in \sigma(T) \iff \bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$

$(\lambda Id_H - T)^*$ обр. $\iff$ $(\lambda Id_H - T$ обр.

$\bar{\lambda} Id_H - T^*$

Факт 2. $\operatorname{Ker} T = T^*(H)^{\perp}$

T е самоспрегнат, ако $T = T^*$.

Твърдение 1: T е самоспрегнат в H $\Rightarrow \|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| \le 1\}$

Док: Нека $C = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| \le 1\}$

$\|\langle Tx, x\rangle\| \le \|Tx\|\|x\| \le \|T\|.\|x^2\| \le \|T\| \Rightarrow C \le \|T\|$

$$\begin{aligned}\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle &= \langle Tx, x\rangle + \langle Ty, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle - \\ &- \langle Tx, x\rangle + \langle Ty, x\rangle - \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle = \\ &= 2\langle Ty, x\rangle + 2\langle Ty, y\rangle\end{aligned}$$

$$|\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle| = \frac{1}{2}|\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(C.\|x+y\|^2 + C\|x-y\|^2\right) = C\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

$$|\langle Tx, x\rangle| = \|x\|^2 \left|\left\langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \le C\|x\|^2$$

$y = \frac{Tx}{\|Tx\|}$

$Tx \ne 0, \|x\| = 1$

$$\left\langle Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|}\right\rangle + \frac{1}{\|Tx\|}\underbrace{\langle T(Tx), x\rangle}_{\langle Tx, Tx\rangle} \le C\left(\|x\|^2 + \left\|\frac{Tx}{\|Tx\|}\right\|^2\right) = 2C$$

от самоспрегнатост

$\square$

Твърдение 2. T - самоспрегнат в H $\Rightarrow$

$\Rightarrow \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}\ \forall x \in H$ и всички собствени стойности са реални.

Док: $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$

$Tx = \lambda x$

$x \neq 0$

$\underset{\mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{\langle Tx, x\rangle}} = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda . \|x\|^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

$\square$

Твърдение 3. T - самоспрегнат в H

Тогава $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \inf\{\|(\lambda Id_H - T)(x)\|, \|x\|=1\} = 0$

$\lambda \in \sigma(T)$ $\quad \lambda Id_H - T$ обратим

$x = (\lambda Id_H - T)^{-1}(\lambda Id_H - T)x$

$\|x\| \leq \|(\lambda Id_H - T)^{-1}\| \|(\lambda Id_H - T)x\|$

Ако $\|x\|=1 \Rightarrow 1/\|(\lambda Id_H - T)^{-1}\| \leq \|(\lambda Id_H - T)(x)\|$

$C = \inf\{\|(\lambda Id_H - T)(x)\| : \|x\| = 1\} > 0$

$\|(\lambda Id_H - T)(x)\| \geq C\|x\|$

$S := \lambda Id_H - T$ е инекция и $S(H)$ е затворен

$y_n \to y_0$

$S(H) \ni y_n = Sx_n$

$\|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{C}\|S(x_n - x_m)\| = \frac{1}{C}\|y_n - y_m\|$ $\quad x_n \to x_0$; $y_n = Sx_n \to Sx_0 = y_0 \in S(H)$

$S(H) \subsetneq H \Rightarrow$ същ. $y_0 \neq 0$, $y_0 \in S(H)$
затворено $\|y_0\| = 1$

$\langle S x, y_0 \rangle = 0 \quad \forall x \in H$

$\langle x, (\bar{\lambda} Id_H - T^*)(y_0) \rangle = 0 \quad \forall x \in H$

$(\bar{\lambda} Id_H - T)(y_0) = 0$

$T = T^*$

$\Rightarrow \bar{\lambda}$ собств. ст. на $T \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda$ е собств. стойност на T $\square$

Теорема 1. T е самоспрегнат в Н. Нека с $M_T = \sup\{\langle Tx, x\rangle, \|x\| = 1\}$, $m_T = \inf\{\langle Tx, x\rangle, \|x\|=1\}$

Твърдим, че $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$ и m_T и $M_T \in \sigma(T)$.

Док.

$\langle (\lambda Id - T)(x), x\rangle - \langle x, (\lambda Id - T)(x)\rangle =$

$= \langle \lambda x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle - \langle x, \lambda x\rangle + \langle Tx, x\rangle =$

$= (\lambda - \bar{\lambda})\|x\|^2 = 2\beta i \|x\|^2$

$\|x\| = 1$

$2|\beta| = |\langle (\lambda Id_H - T)(x), x\rangle - \langle x, (\lambda Id_H - T)(x)\rangle| \leq 2\|(\lambda Id_H - T)(x)\|$

$\inf\{\|(\lambda Id_H - T)(x)\| : \|x\| = 1\} \geq |\beta|$

$S = T + \mu Id_H$

$m_S = m_T + \mu$

$M_S = M_T + \mu$

$\sigma(S) = \sigma(T) + \mu$

$\lambda \in \sigma(S) \iff (\lambda - \mu)(Id_H - T)$ е необратим.

$\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$

$0 \leq m_S \leq M_S$

$\|S\| = \sup\{\langle Sx, x\rangle : \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\langle Sx, x\rangle| \, \|x\| = 1\}$

$\sigma(S) \subseteq [-M_S, M_S]$

$\lambda \in \mathbb{R}, \lambda < m_S$

$d = m_S - \lambda > 0$

$\langle (S - \lambda Id_H)(x), x\rangle = \langle Sx, x\rangle - \lambda \|x\|^2 \geq m_S - \lambda = d > 0$

$|\langle (\lambda Id_H - S)(x), x\rangle| \leq \|(\lambda Id_H - S)(x)\| \cdot \|x\|$

$\inf\{\|(\lambda Id_H - S)(x)\| : \|x\| = 1\} \geq d > 0 \Rightarrow \lambda \in \sigma(S)$

Нека $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \{x : \|x\| = 1\}$

$\langle Sx_n, x_n\rangle \to M_S$

$\|(M_S Id_H - S)(x_n)\|^2 = \langle (M_S Id_H - S)(x_n), (M_S Id_H - S)(x_n)\rangle \geq$

$\geq M_S^2 \langle x_n, x_n\rangle - \langle Sx_n, M_S x_n\rangle - \langle M_S x_n, Sx_n\rangle + \langle Sx_n, Sx_n\rangle =$

$= M_S^2 - 2M_S \langle Sx_n, x_n\rangle + \|Sx_n\|^2 \leq M_S^2 + M_S^2 - 2M_S\langle Sx_n, x_n\rangle =$

$= 2M_S(M_S - \langle Sx_n, x_n\rangle) \Rightarrow M_S \in \sigma(S)$

при $n \to \infty$
клони към 0

□

Лема 1: T - самоспрегнат в H

λ_1 и λ_2 са собствени стойности и x_1 и x_2 са техни собствени вектори.

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\Rightarrow x_1 \perp x_2$

Док: $\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle T x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, T x_2 \rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle = 0$, понеже $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Твърдение 4: T - самоспрегнат в H

M инв. за T $(T(M) \subseteq M)$

$N = M^{\perp}$

$\Rightarrow T(N) \subset N$

Док:

Ако $T_1 = T|_M$, $T_2 = T|_N$, то тогава

T_1 е самоспрегнат оператор в $\mathcal{B}(M)$

T_2 ——— || ——— в $\mathcal{B}(N)$

$T(H) = T_1(M) \oplus T_2(N)$ и $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$.

$x \in H$

$\langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in M$

$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = 0 \Rightarrow Tx \in N$

$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \ \forall x, y \in M$

$\lambda \in \sigma(T_1) = \inf\{ \|(\lambda Id_H - T)(x)\| ; \|x\| = 1 \}$

$\lambda \notin \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2) \Rightarrow$ съществува $c > 0$ такава, че

$\|(\lambda Id_H - T)(x)\| \geq c\|x\| \ \forall x \in M$

$\|(\lambda Id_H - T)(x)\| \geq c\|x\| \ \forall x \in N$

$z \in H \Rightarrow z = x + y, x \in M, y \in N$

$$\|(\lambda Id_H - T)(x)\|^2 = \|(\lambda Id_H - T)(x)\|^2 + \|(\lambda Id_H - T)(y)\|^2 \geq c^2\|x\|^2 + c^2\|y\|^2 = c^2\|z\|^2$$

H - хилбертово пространство над $\mathbb{C}$

T - самоспрегнат и компактен

Факт 1. T има поне една собствена стойност

Факт 2. Нека $\dim H = \infty$ и $T \neq 0 \Rightarrow \sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_i\}$, където $\{\lambda_i\}$ са различни реални собствени стойности, които или са краен брой, или $\lambda \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

При H има ортонормален базис, състоящ се от собствени вектори на T.

$$B = \bigcup_{\lambda \text{ - собств.ст.}} B_\lambda$$

$\overline{span}\, B$ - инвариантно

$$G = T|_{(\overline{span}\, B)^\perp}$$

Факт 3. $\sigma(T)$ съвпада със затворената обвивка на собствените стойности

Теорема 2 (спектрална декомпозиция)

H - безкрайномерно сепарабелно хилбертово пространство

T - компактно самоспрегнато

$\Rightarrow$ Същ. $\{e_i\}_i^\infty$ изброим ортонормиран базис на H, състоящ се от собствени вектори на T.

$e_i \to \lambda_i$ собств. ст.

$$\Rightarrow T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i \quad \forall x \in H$$

и

$$R(\lambda)(x) = (\lambda Id_H - T)^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_i \rangle}{\lambda - \lambda_i} e_i \quad \forall \lambda \notin \sigma(T) \quad \forall x \in H$$

Док!

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{n+k} \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+k} \lambda_i^2 \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|T\|^2 \sum_{i=n+1}^{n+1} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_1, e_i \rangle e_i$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \lambda \langle x, e_i \rangle e_i$ е сходящ

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i$$

линеен оператор

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|T\|^2 \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

S е непрекъснат

$\lambda \neq \sigma(T)$

$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$

$\delta = \delta(\lambda, \sigma(T)) > 0$ (разстояние)

$$\Big\| \sum_{i=n+1}^{n+k} \frac{\langle x, e_i\rangle}{\lambda - \lambda_i} e_i \Big\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+k} \frac{|\langle x, e_i\rangle|^2}{|\lambda - \lambda_i|^2} \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{i=n+1}^{n+k} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

$$\mathcal{U}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_i\rangle}{\lambda - \lambda_i} e_i$$

линеен непрекъснат оператор:

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, e_i\rangle}{\lambda - \lambda_i} \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\langle x, e_i\rangle|^2}{|\lambda - \lambda_i|^2} \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

$$\|\mathcal{U}(x)\|^2 \leq \frac{1}{\delta^2} \|x\|^2$$

$$\|\mathcal{U}x\| \leq \frac{1}{\delta} \|x\|$$

$$(\lambda Id_H - T)(\mathcal{U}(x)) = \lambda Id_H\, \mathcal{U}(x) - T(\mathcal{U}(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_i} \langle x, e_i\rangle e_i - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle \mathcal{U}_x, e_j\rangle e_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_i} \langle x, e_i\rangle e_i - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_j \frac{\langle x, e_i\rangle}{\lambda - \lambda_i} \cdot \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_i} \langle x, e_i\rangle e_i -$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i \langle x, e_i\rangle}{\lambda - \lambda_i} =$$

$$= \mathcal{U}((\lambda Id_H - T)(x)) = x, \forall x \in H$$